MÉMOIRE

SUR LA DOUBLE RÉFRACTION,

PAR M. A. FRESNEL (1).

INTRODUCTION.

HUYGENS, guidé par une hypothèse puisée dans la théorie des ondes, a reconnu le premier les véritables lois de la double réfraction des cristaux à un axe. Cette découverte était peut-être plus difficile à faire que toutes celles de Newton sur la lumière; et ce qui semble le prouver, c'est qu'ici Newton, après

(1) Les trois Mémoires dont celui-ci offre la réunion ont été successivement présentés à l'Institut le 26 novembre 1821, le 22 janvier 1822, et le 22 avril de la même année. En les réunissant, on a changé l'ordre des matières et fait des suppressions assez considérables; mais on n'a rien ajouté d'essentiel aux faits nouveaux et aux vues théoriques qu'ils contenaient: l'on a seulement donné à celles-ci quelques développements nécessaires à leur intelligence, et l'on a cru utile d'insérer dans ce Mémoire une démonstration complète de la direction transversale des vibrations lumineuses, parce que c'est sur ce principe que repose la théorie de la polarisation et de la double réfraction: cette démonstration a déja été publiée dans le Bulletin de la Société philomatique, mois d'octobre 1824.

d'inutiles efforts pour découvrir la vérité, est tombé dans l'erreur. En songeant combien le phénomène de la double réfraction devait piquer vivement sa curiosité, on ne peut pas supposer qu'il y ait donné moins d'attention qu'aux autres phénomènes de l'optique, et l'on doit être surpris de lui voir substituer une règle fausse à la construction aussi exacte qu'élégante de Huygens, construction qu'il connaissait sans doute, puisqu'il cite son traité sur la lumière. Mais, ce qui paraît encore plus inconcevable, c'est que l'exactitude de la loi d'Huygens ait été méconnue pendant plus de cent ans, quoiqu'elle fût appuyée des vérifications expérimentales de ce grand homme, aussi remarquable peut-être par sa bonne foi et sa modestie que par sa rare sagacité. Si nous osions hasarder une explication de ce trait singulier de l'histoire de la science, nous dirions que les considérations puisées dans la théorie des ondes qui avaient guidé Huygens, ont fait supposer peut-être aux partisans du système de l'émission qu'il n'avait pu arriver à la vérité par une hypothèse erronée, et les ont empêchés de lire son traité sur la lumière avec l'attention qu'il méritait.

Parmi les physiciens modernes, M. Young est le premier qui ait soupçonné la justesse de la loi d'Huygens; c'est d'après son conseil que M. Wollaston l'a vérifiée par des expériences nombreuses et précises. A peine le résultat de ces expériences était-il connu en France, que Malus s'est occupé du même travail, et a trouvé, comme M. Wollaston, la loi d'Huygens parfaitement d'accord en nombres avec toutes les mesures données par l'observation. M. de Laplace considérant la double réfraction sous le point de vue du système de l'émission, a fait une application savante du principe de

la moindre action au calcul de la réfraction extraordinaire. Il a trouvé qu'on pouvait expliquer la marche des molécules lumineuses soumises à cette réfraction, en supposant qu'elles sont repoussées par une force perpendiculaire à l'axe du cristal, et proportionnelle au carré du sinus de l'angle que le rayon extraordinaire fait avec cet axe; d'où il suit que la différence entre les carrés des vitesses des rayons ordinaire et extraordinaire est proportionnelle au carré du même sinus.

Ce résultat n'est que la traduction de la loi d'Huygens dans le langage du système de l'émission. Les calculs de M. de Laplace n'ont point éclairci la question théorique; car ils ne montrent pas pourquoi la force répulsive qui émane de l'axe varierait comme le carré du sinus de l'inclinaison du rayon extraordinaire sur celui-ci; et il est bien difficile de justifier cette hypothèse par des considérations mécaniques.

En effet, le même rayon polarisé subit la réfraction ordinaire ou extraordinaire dans un rhomboïde de spath calcaire, selon que son plan de polarisation est parallèle ou perpendiculaire à la section principale du cristal; ce seraient donc les pans latéraux du faisceau ou les faces parallèles des molécules lumineuses dont il se compose qui détermineraient seules, par la différence de leurs propriétés ou dispositions physiques, la nature de la réfraction; deux de ces pans ressentiraient l'influence répulsive de l'axe, et les deux autres y seraient insensibles : il faudrait supposer aussi la même absence d'action sur les faces antérieures et postérieures des molécules lumineuses, puisqu'en faisant simplement tourner le rayon sur lui-même, et sans changer la direction de ces dernières faces, on le soustrait à l'action répulsive de l'axe. Mais les faces latérales des molécules lumineuses ne sont pas

moins exposées à la force répulsive qui émane de l'axe et agit perpendiculairement à sa direction, quand le rayon est parallèle à l'axe que lorsqu'il lui est perpendiculaire; et l'on ne voit pas pourquoi cette action serait nulle dans le premier cas, tandis qu'elle atteindrait son *maximum* dans le second.

Si, laissant de côté toutes recherches sur la cause mécanique de cette loi singulière, on la considère comme une conséquence nécessaire des faits dans le système de l'émission, on est encore embarrassé par d'autres difficultés. Selon ce système, un faisceau de lumière ordinaire est composé de molécules dont les plans de polarisation sont tournés dans tous les azimuts : l'expérience démontre d'ailleurs que la direction du plan de polarisation d'un rayon incident ne change pas brusquement au moment où il pénètre dans le cristal, mais graduellement et après qu'il en a traversé une épaisseur sensible, beaucoup plus considérable en général que celle à laquelle on doit borner la sphère d'activité de la réfraction ordinaire et extraordinaire, ou les limites de la partie courbe de la trajectoire. Cela posé, dans un faisceau de lumière ordinaire, il n'y aura qu'une très-petite portion des rayons qui auront leurs plans de polarisation exactement parallèles ou perpendiculaires à la section principale : ceux de la presque totalité des molécules lumineuses se trouveront également partagés entre tous les azimuts intermédiaires : or, si l'influence répulsive de l'axe est nulle sur un rayon polarisé parallélement à la section principale, et si elle se fait sentir avec toute son énergie quand il est polarisé suivant une direction perpendiculaire, cette force répulsive doit varier graduellement pour les directions intermédiaires, de-

puis la première, où elle est nulle, jusqu'à la dernière, où elle atteint son *maximum*. Ainsi, puisque les molécules qui composent la lumière directe sont polarisées suivant une infinité d'azimuts différents, elles se trouveront soumises à des forces répulsives qui différeront aussi en intensité; par conséquent leurs trajectoires à l'entrée du cristal devront éprouver des inflexions diverses. Pour qu'elles ne fussent pas sensiblement affectées par les différences d'intensité que la diversité des plans de polarisation des rayons incidents doit apporter dans l'intensité de l'action répulsive de l'axe, il faudrait que cette action, ainsi que la force réfringente du milieu, se fissent sentir à des profondeurs beaucoup plus considérables que celle jusqu'à laquelle les molécules lumineuses conservent à peu près le même plan de polarisation. Or, c'est précisément le contraire qui est le plus vraisemblable; car l'épaisseur de cristal nécessaire pour changer le plan de polarisation est trop sensible, surtout dans certains cas, pour qu'on puisse admettre que la partie courbe de la trajectoire de la molécule lumineuse s'étende aussi loin; cette courbe, et partant la direction définitive du rayon réfracté, devront donc varier en raison de l'azimut du plan de polarisation du rayon incident. Ainsi, en suivant cette hypothèse dans ses conséquences, on trouverait que la lumière, au lieu de se diviser simplement en deux faisceaux, devrait se partager en une foule de rayons distribués suivant toutes les inclinaisons comprises entre les directions extrêmes du faisceau ordinaire et du faisceau extraordinaire.

La théorie que nous combattons ici, et contre laquelle on pourrait faire encore beaucoup d'autres objections, n'a conduit à aucune découverte. Les savants calculs de M. de La-

place, quelque remarquables qu'ils soient par une élégante application des principes de la mécanique, n'ont rien appris de nouveau sur les lois de la double réfraction. Or, nous ne pensons pas que les secours qu'on peut tirer d'une bonne théorie doivent se borner à calculer les forces, quand les lois des phénomènes sont connues : elle contribuerait trop peu aux progrès de la science. Il est certaines lois si compliquées ou si singulières, que la seule observation aidée de l'analogie ne pourrait jamais les faire découvrir. Pour deviner ces énigmes, il faut être guidé par des idées théoriques appuyées sur une hypothèse *vraie*. La théorie des vibrations lumineuses présente ce caractère et ces avantages précieux; car on lui doit la découverte des lois de l'optique les plus compliquées ou les plus difficiles à deviner; tandis que toutes les autres découvertes très-nombreuses et très-importantes sans doute, qui ont été faites dans cette science par les physiciens partisans du système de l'émission, sont bien plutôt le fruit de leurs observations et de leur sagacité, à commencer par celles de Newton, que des conséquences mathématiques déduites de son système (1).

---

(1) J'ai pour les travaux de Newton et de M. de Laplace l'admiration la plus vive et la plus sincère : mais je n'admire pas également tout ce qu'ils ont fait, et je ne pense point, par exemple, comme beaucoup de personnes, que l'optique de Newton soit un de ses plus beaux titres de gloire : elle renferme plusieurs erreurs graves, et les vérités qu'elle contient étaient bien moins difficiles à trouver que l'explication mécanique des mouvements célestes. Quelle différence, en effet, entre l'analyse si simple de la lumière, et ce coup-d'œil profond qui fit voir à Newton que la précession des équinoxes était occasionnée par l'aplatissement de la terre! C'est son immortel ouvrage des principes et la découverte de la méthode des fluxions qui l'ont

La théorie des vibrations, qui avait suggéré à Huygens l'idée des ondes ellipsoïdales, au moyen desquelles il a si heureusement représenté la marche des rayons extraordinaires dans les cristaux à un axe, nous a conduit à la découverte des véritables lois de la double réfraction dans le cas général des cristaux à deux axes. Sans doute une partie importante de ces lois était déja connue : M. Brewster et M. Biot, par de nombreuses observations et un habile emploi de l'analogie, étaient déja parvenus à découvrir la loi de la direction des plans de polarisation des deux faisceaux et de leur différence de vitesse; mais ils s'étaient mépris sur leurs vitesses absolues, en supposant que celle du faisceau ordinaire restait constante, comme dans les cristaux à un axe. Les expériences que M. Biot avait faites sur la topaze pour vérifier cette hypothèse ne lui avaient présenté aucune différence sensible dans la réfraction du faisceau nommé *ordinaire;* mais on cesse d'être surpris que ces variations aient échappé à l'attention d'un observateur aussi exact, quand on sait combien elles sont petites dans presque toutes les directions, excepté celles où elles atteignent leur *maximum*, qui ne pouvaient être indiquées que par la théorie ou un heureux hasard.

Les considérations mécaniques sur la nature des vibrations lumineuses, et la constitution des milieux doublement

placé au premier rang des géomètres et des physiciens. Mais, quelque grande que soit la supériorité intellectuelle d'un homme aussi prodigieux, il n'en est pas moins sujet à se tromper : on ne saurait trop le répéter : *Errare humanum est.* Rien ne serait plus funeste au progrès des sciences que la doctrine de l'infaillibilité.

réfringents, que j'ai exposées dans les *Annales de chimie et de physique*, tom. XVII, pag. 179 et suivantes, m'avaient servi à expliquer en même temps les changements de la réfraction extraordinaire, et la vitesse constante du faisceau ordinaire dans les cristaux à un axe. Je m'aperçus bientôt que la raison que je me donnais de l'uniformité de la vitesse du rayon ordinaire dans les cristaux à un axe n'était pas applicable aux cristaux à deux axes; et en suivant toujours les mêmes idées théoriques, je sentis que dans ceux-ci aucun des deux faisceaux ne devait être soumis aux lois de la réfraction ordinaire; c'est aussi ce que je vérifiai par l'expérience, un mois après l'avoir annoncé à M. Arago : je ne lui présentai pas à la vérité ce résultat de mes réflexions comme une chose certaine, mais comme une conséquence si nécessaire de mes idées théoriques, que je serais obligé de les abandonner si l'expérience ne confirmait pas ce caractère singulier de la double réfraction des cristaux à deux axes.

La théorie ne m'annonçait pas d'une manière vague les variations de vitesse du rayon ordinaire : elle me donnait le moyen de déduire leur étendue des éléments de la double réfraction du cristal, c'est-à-dire de son degré d'énergie et de l'angle des deux axes. J'avais fait d'avance ce calcul pour la topaze limpide, d'après les données tirées des observations de M. Biot: l'expérience s'est accordée, d'une manière satisfaisante avec le calcul, ou du moins la différence que j'ai observée est assez petite pour être attribuée à quelque inexactitude dans les coupes du cristal ou la direction des rayons, et peut-être aussi à quelque légère différence de propriétés optiques entre ma topaze et celles de M. Biot.

Mais avant d'entrer dans le détail de ces expériences, je vais

tâcher d'exposer clairement les raisonnements qui m'y ont conduit. Je suivrai dans ce Mémoire la méthode synthétique: j'exposerai d'abord la théorie mécanique de la double réfraction, et je ferai connaître ensuite les observations et les calculs qui m'ont servi à la vérifier et qui forment en quelque sorte sa démonstration expérimentale.

THÉORIE MÉCANIQUE

DE

LA DOUBLE RÉFRACTION.

Cette théorie repose sur deux hypothèses, l'une relative à la nature des vibrations lumineuses, et l'autre à la constitution des milieux doués de la double réfraction. Selon la première, les vibrations lumineuses, au lieu de s'exécuter dans la direction même des rayons, comme l'ont supposé généralement les savants qui ont appliqué le système des ondes à l'optique, seraient perpendiculaires aux rayons, ou, plus rigoureusement, seraient parallèles à la surface des ondes. Suivant la seconde hypothèse, les molécules vibrantes des milieux doués de la double réfraction ne présenteraient pas la même dépendance mutuelle dans toutes les directions, en sorte que leurs déplacements relatifs mettraient en jeu des élasticités différentes selon le sens dans lequel ils s'exécuteraient.

Cette seconde supposition n'a rien que de très-admissible: elle est plus générale que la supposition contraire, d'après

laquelle la dépendance mutuelle des molécules, ou l'élasticité, serait la même dans tous les sens. Si beaucoup de corps ne présentent pas les phénomènes qui doivent en résulter, cela tient sans doute le plus souvent à ce que leurs groupes moléculaires, tournés dans divers sens, produisent des effets opposés qui se compensent.

Quant à l'hypothèse sur la nature des vibrations lumineuses, elle paraît au premier abord beaucoup plus difficile à admettre, parce qu'on ne voit pas aisément comment des vibrations transversales peuvent se propager indéfiniment dans un fluide. Néanmoins, si les faits qui fournissent déja tant de probabilités pour le système des ondes et tant d'objections contre celui de l'émission, nous obligent à reconnaître ce caractère dans les vibrations lumineuses, il est plus sûr de nous en rapporter ici à l'expérience qu'aux notions malheureusement trop incomplètes que les calculs des géomètres nous ont données jusqu'à présent sur les vibrations des fluides élastiques.

Avant de montrer comment on peut concevoir la propagation de ces vibrations transversales dans un fluide élastique tel que celui qui transmet la lumière, je dois prouver que leur existence devient une conséquence nécessaire des faits, dès qu'on admet le système des ondes.

Lorsque nous eûmes remarqué, M. Arago et moi, que les rayons polarisés à angle droit produisent toujours la même quantité de lumière par leur réunion, quelle que soit leur différence de marche, je pensai qu'on pouvait expliquer aisément cette loi particulière de l'interférence des rayons polarisés, en supposant que les vibrations lumineuses, au lieu de pousser les molécules éthérées parallèlement aux rayons, les faisaient osciller dans des directions perpendiculaires, et que

ces directions se trouvaient rectangulaires pour deux faisceaux polarisés à angle droit. Mais cette supposition était si contraire aux idées reçues sur la nature des vibrations des fluides élastiques, que je fus long-temps avant de l'adopter entièrement; et, lors même que l'ensemble des faits et de nouvelles réflexions m'eurent persuadé qu'elle était nécessaire à l'explication des phénomènes de l'optique, j'attendis avant de la soumettre à l'examen des physiciens, que je me fusse assuré qu'elle n'était point contraire aux principes de la mécanique. M. Young, plus hardi dans ses conjectures, et moins confiant dans les vues des géomètres, l'a publiée avant moi (quoiqu'il y ait peut-être pensé plus tard), et par conséquent la priorité lui appartient sur cette idée théorique comme sur beaucoup d'autres. Ce sont les expériences du docteur Brewster sur les cristaux à deux axes qui l'ont conduit à penser que les vibrations de la lumière, au lieu de s'exécuter longitudinalement, dans la direction des rayons, pourraient bien être transversales, et semblables aux ondulations d'une corde indéfinie qu'on agiterait par une de ses extrémités; c'est du moins à l'occasion des observations de M. Brewster qu'il a publié cette hypothèse, c'est-à-dire trois ans après la découverte des caractères particuliers de l'interférence des rayons polarisés. En m'appuyant sur la première loi d'interférence de ces rayons, je vais essayer de prouver que les vibrations lumineuses s'exécutent uniquement dans une direction parallèle à la surface des ondes.

Démonstration de l'existence exclusive des vibrations transversales dans les rayons lumineux.

C'est en 1816 que nous avons reconnu, M. Arago et moi,

que deux faisceaux de lumière polarisés suivant des plans rectangulaires n'exercent plus l'un sur l'autre aucune influence, dans les mêmes circonstances où des rayons de lumière ordinaire présentent le phénomène des interférences; tandis que dès que leurs plans de polarisation se rapprochent un peu, on voit reparaître les bandes obscures et brillantes résultant de la rencontre des deux faisceaux, lesquelles deviennent d'autant plus marquées que ces plans sont plus près de se confondre.

Cette expérience apprend que deux faisceaux polarisés suivant des plans rectangulaires donnent toujours par leur réunion la même intensité de lumière, quelle que soit la différence des chemins qu'ils ont parcourus à partir de leur source commune. Or, de ce fait il résulte nécessairement que, dans les deux faisceaux, les vibrations des molécules éthérées s'exécutent perpendiculairement aux rayons et suivant des directions rectangulaires.

Pour le démontrer, je rappellerai d'abord que dans les oscillations rectilignes produites par un petit dérangement d'équilibre, la vitesse absolue de la particule vibrante est proportionnelle au sinus du temps compté de l'origine du mouvement, la durée d'une oscillation complète répondant à une circonférence entière. Si l'oscillation est curviligne, elle pourra toujours se décomposer en deux oscillations rectilignes perpendiculaires entre elles, auxquelles s'appliquera le même théorème.

Dans l'onde lumineuse produite par l'oscillation de la particule éclairante, les vitesses absolues qui animent les molécules de l'éther sont proportionnelles aux vitesses correspondantes de la particule éclairante, et par conséquent aussi au sinus du temps. D'ailleurs, l'espace parcouru par

chacun des ébranlements élémentaires dont l'onde se compose est proportionnel au temps; et autant cet espace contient de fois la longueur d'ondulation, autant d'oscillations entières se sont exécutées depuis le départ de l'ébranlement. Si donc on représente par π le rapport de la circonférence au diamètre, par t le temps écoulé depuis l'origine du mouvement; si de plus nous appelons λ la longueur d'ondulation et x l'espace parcouru par l'ébranlement pour arriver au point de l'éther que nous considérons; la vitesse absolue qui anime ce point après le temps t, sera représentée par $a \sin. 2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)$; a étant ici un coefficient constant proportionnel à l'amplitude des oscillations des molécules éthérées ou à l'intensité de leurs vitesses absolues (1).

Cela posé, considérons un des deux faisceaux interférents. Quelle que soit la direction de la vitesse absolue de la molécule éthérée, nous pouvons toujours décomposer cette vitesse à chaque instant suivant trois directions rectangulaires constantes; la première sera, par exemple, la direction même de la normale à l'onde, et les deux autres, perpendiculaires à celle-ci, seront l'une parallèle et la troisième perpendiculaire au plan de polarisation. D'après le principe général des petits mouvements, on peut considérer les oscillations exécutées par la molécule éthérée, de quelque nature

(1) On trouvera dans le tome V des Mémoires de l'Académie des Sciences, page 376 et suivantes, une démonstration de ces formules et une explication plus détaillée de leur usage. Les lecteurs qui ne seraient pas familiarisés avec la théorie des ondes lumineuses, pourront en étudier d'abord les principes élémentaires dans l'article sur la lumière du Supplément à la traduction française de la cinquième édition de la *Chimie de Thomson*.

qu'elles soient, comme résultant de la combinaison de trois séries d'oscillations rectilignes dirigées suivant ces trois axes rectangulaires, oscillations que, pour plus de généralité, nous supposerons avoir commencé à des époques différentes.

Appelons t le temps écoulé depuis une époque commune, et représentons par u, v et w ce qu'il faut ajouter à t pour avoir le temps total compté à partir de l'origine du mouvement dans chacun des trois modes de vibrations rectilignes; alors les vitesses absolues apportées à l'instant que nous considérons, seront :

$$a\sin.2\pi\left(u+t-\frac{x}{\lambda}\right);\ b\sin.2\pi\left(v+t-\frac{x}{\lambda}\right);\ c\sin.2\pi\left(w+t-\frac{x}{\lambda}\right);$$

a, b et c étant les coefficients constants qui expriment l'intensité des vitesses absolues dans chaque système d'oscillation rectiligne.

Considérons maintenant le second faisceau polarisé, et décomposons ses vitesses absolues suivant les mêmes axes rectangulaires : si nous représentons par x' le chemin qu'il a parcouru pour arriver au même point, nous aurons pareillement pour les trois composantes apportées à l'instant t :

$$a'\sin.2\pi\left(u+t-\frac{x'}{\lambda}\right);\ b'\sin.2\pi\left(v+t-\frac{x'}{\lambda}\right);\ c'\sin.2\pi\left(w+t-\frac{x'}{\lambda}\right).$$

Ces trois vitesses ayant respectivement les mêmes directions que les précédentes, il suffit de les ajouter pour avoir leurs résultantes, ce qui donne :

$$a\sin.2\pi\left(u+t-\frac{x}{\lambda}\right)+a'\sin.2\pi\left(u'+t-\frac{x'}{\lambda}\right),$$

$$b\sin.2\pi\left(v+t-\frac{x}{\lambda}\right)+b'\sin.2\pi\left(v'+t-\frac{x'}{\lambda}\right),$$

$$c \sin. 2\pi\left(w + t - \frac{x}{\lambda}\right) + c' \sin. 2\pi\left(w' + t - \frac{x'}{\lambda}\right).$$

Si l'on transforme chacune de ces expressions de manière à ce qu'elle ne renferme plus qu'un seul sinus, en suivant la méthode indiquée dans mon Mémoire sur la diffraction, tom. V des *Mémoires de l'Académie des sciences,* page 379, on trouve que le carré du coëfficient constant qui multiplie ce sinus, est égal pour chacune d'elles respectivement à

$$a^2 + a'^2 + 2aa' \cos. 2\pi\left(u - u' + \frac{x' - x}{\lambda}\right),$$

$$b^2 + b'^2 + 2bb' \cos. 2\pi\left(v - v' + \frac{x' - x}{\lambda}\right),$$

$$c^2 + c'^2 + 2cc' \cos. 2\pi\left(w - w' + \frac{x' - x}{\lambda}\right).$$

Or, c'est le carré du coefficient constant des vitesses absolues qui représente, dans chaque système de vibrations, l'intensité de la lumière, toujours proportionnelle à la somme des forces vives; et comme ces vitesses sont rectangulaires, il suffit d'ajouter les trois carrés ci-dessus pour avoir la somme totale des forces vives résultant des trois systèmes de vibrations, c'est-à-dire l'intensité de la lumière totale.

L'expérience démontre que cette intensité reste constante, quelques variations qu'éprouve la différence $x'-x$ des chemins parcourus, quand les deux faisceaux interférents ont leurs plans de polarisation perpendiculaires entre eux. Ainsi, dans ce cas, la somme des trois expressions ci-dessus reste la même pour toutes les valeurs de $x'-x$. Il faut donc qu'on ait

$$a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2+2aa'\cos.2\pi\left(u-u'+\frac{x'-x}{\lambda}\right)+$$
$$2bb'\cos.2\pi\left(v-v'+\frac{x'-x}{\lambda}\right)+2cc'\cos.2\pi\left(w-w'+\frac{x'-x}{\lambda}\right)=C,$$

équation dans laquelle il n'y a de variable que $x'-x$. Or, cette équation devant être satisfaite, quelle que soit la valeur de $x'-x$, il est clair que tous les termes qui contiennent $x'-x$ doivent disparaître, puisque sans cela on tirerait de l'équation des valeurs particulières pour $x'-x$. Par conséquent, l'on a

$$aa'=0;\ bb'=0;\ cc'=0.$$

Les deux faisceaux polarisés qui interfèrent ne diffèrent que par les azimuts de leurs plans de polarisation; c'est-à-dire que si l'on fait tourner l'un d'eux autour de son axe, de manière que son plan de polarisation soit parallèle à celui de l'autre, ces deux faisceaux lumineux présenteront dans tous les sens exactement les mêmes propriétés; ils se réfléchiront et se réfracteront de la même manière et dans les mêmes proportions sous les mêmes incidences. Il faut donc admettre que si l'un n'a pas de mouvements vibratoires perpendiculaires aux ondes, l'autre n'en a pas non plus. Or a et a' sont les coefficients constants des vitesses absolues normales aux ondes, dans ces deux faisceaux; et puisque $aa'=0$, ce qui exige qu'on ait au moins $a=0$ ou $a'=0$, on doit en conclure que a et a' sont tous les deux égaux à zéro. Il ne peut donc y avoir dans la lumière polarisée que des mouvements vibratoires parallèles à la surface des ondes.

Considérons maintenant les deux autres équations $bb'=0$ et $cc'=0$, qui contiennent les coefficients constants des

vitesses perpendiculaires aux rayons, ou plus généralement parallèles aux ondes : b est, pour le premier faisceau lumineux, la composante parallèle à son plan de polarisation, et c celle qui lui est perpendiculaire; tandis que pour le second, b' étant parallèle à b, est perpendiculaire au plan de polarisation, et c' lui est parallèle; ainsi b' et c' sont respectivement pour le second faisceau ce que c et b sont pour le premier. Par conséquent, d'après la remarque que nous venons de faire sur la similitude parfaite entre les propriétés des deux faisceaux interférents, si dans le premier $b=0$, dans le second c' sera nul, ou si c'est la composante c qui est nulle dans le premier, b' dans le second sera égal à zéro. Ainsi, l'on doit conclure des deux équations ci-dessus :

$$b=0 \text{ et } c'=0, \text{ ou } c=0 \text{ et } b'=0;$$

c'est-à-dire qu'il n'y a dans chacun des deux faisceaux que des vibrations parallèles ou perpendiculaires à son plan de polarisation.

Lorsque nous aurons exposé les causes mécaniques de la double réfraction, nous montrerons que ces vibrations sont perpendiculaires à la section principale, dans le faisceau ordinaire, c'est-à-dire au plan qu'on est convenu d'appeler *plan de polarisation.*

Ayant démontré que dans la lumière polarisée les molécules éthérées ne peuvent avoir aucun mouvement vibratoire normal aux ondes, nous devons supposer que ce mode de vibration n'existe pas davantage dans la lumière ordinaire. En effet, quand un faisceau de lumière ordinaire tombant perpendiculairement sur un cristal doué de la double réfraction, est divisé en deux faisceaux polarisés, ils ne contiennent plus de vibrations normales aux ondes. S'il y en avait

eu dans la lumière incidente, elles auraient donc été détruites; d'où serait résulté une diminution des forces vives, et par conséquent, un affaiblissement de la lumière; ce qui serait contraire à l'observation; car, lorsque le cristal est parfaitement diaphane, les deux faisceaux émergents réunis reproduisent une lumière égale à celle du faisceau incident, si on leur ajoute la petite quantité de lumière réfléchie sur les faces du cristal. Or, on ne peut pas supposer que c'est dans cette petite quantité de lumière que se sont réfugiées les vibrations normales aux ondes, puisqu'en la faisant passer à travers le cristal on la transformerait aussi presque entièrement en deux faisceaux polarisés, où l'on est certain que ce genre de vibrations n'existe pas. Il est donc naturel de supposer que la lumière ordinaire ne renferme aussi que des vibrations parallèles aux ondes, et de la considérer comme l'assemblage et la succession rapide d'une foule de systèmes d'ondes polarisées dans tous les azimuts. D'après cette théorie, l'acte de la polarisation ne consiste pas dans la création des vibrations transversales, mais dans la décomposition de ces vibrations suivant deux directions rectangulaires fixes, et dans la séparation des rayons résultant de cette décomposition.

Explication théorique des lois d'interférence des rayons polarisés.

D'après ce que nous venons de dire sur la nature des vibrations des rayons polarisés, il est clair qu'ils ne peuvent présenter des phénomènes d'interférences qu'autant que leurs plans de polarisation sont parallèles ou s'approchent du parallélisme. Quand ces plans sont perpendiculaires, les vitesses

absolues des molécules éthérées le sont aussi; si donc, en chaque point de la direction commune des deux rayons, on veut avoir la résultante des deux vitesses qu'ils impriment à la molécule éthérée, il faudra faire la somme des carrés des deux vitesses; ce sera le carré de la résultante : le même calcul s'appliquera à tous les points des deux systèmes d'ondes, quelle que soit d'ailleurs leur différence de marche; ainsi la somme des carrés des vitesses absolues imprimées aux molécules éthérées par la réunion des deux systèmes d'ondes, sera toujours égale à la somme des carrés des vitesses absolues apportées par l'un et l'autre rayon lumineux, ou, en d'autres termes, l'intensité de la lumière totale sera toujours égale à la somme des intensités des deux rayons interférents, quelle que soit leur différence de marche. Les variations de cette différence ne pourront donc pas produire les alternatives d'éclat et d'obscurité qu'on remarque dans la lumière ordinaire ou dans les rayons polarisés suivant des directions parallèles. On voit avec quelle facilité notre hypothèse explique la première loi de l'interférence des rayons polarisés; et cela devait être, puisque c'est de cette loi même que nous l'avons déduite.

Nous pouvons la regarder comme suffisamment établie par la démonstration que nous venons d'en donner; mais il ne sera pas inutile de montrer que la même hypothèse s'accorde tout aussi bien avec les autres lois de l'interférence des rayons polarisés, qui en deviennent des conséquences immédiates. Ces développements théoriques sur les propriétés de la lumière polarisée ne paraîtront pas déplacés dans un Essai sur la double réfraction, et trouveront d'ailleurs leur application dans les Mémoires que nous nous proposons de publier ensuite touchant la coloration des lames cristallisées.

Lorsque les faisceaux lumineux qui interfèrent ont leurs plans de polarisation parallèles, leurs mouvements vibratoires ont la même direction, et en conséquence, s'ajoutent tout le long des rayons, quand la différence de marche est nulle ou égale à un nombre pair de demi-ondulations, et se retranchent l'un de l'autre quand elle en contient un nombre impair. En général, pour avoir dans ce cas l'intensité de la lumière résultant du concours des divers systèmes d'ondes, on pourra employer les formules déja citées de mon Mémoire sur la diffraction, qui ont été calculées dans l'hypothèse que les vibrations des rayons interférents s'exécutaient suivant une direction commune.

J'arrive maintenant au troisième principe de l'interférence des rayons polarisés. Lorsque deux parties d'un faisceau lumineux qui avaient d'abord même plan de polarisation PP′, reçoivent une polarisation nouvelle dans deux plans différents OO′ et EE′, et se trouvent ensuite ramenées à un plan commun de polarisation SS′ ou TT′, leur accord ou leur discordance répondent précisément à la différence des chemins parcourus, quand les deux plans de polarisation OC et E′C partis de la direction primitive CP, après s'être écartés l'un de l'autre, se rapprochent ensuite par un mouvement contraire pour se réunir en CS; mais lorsque les deux plans CO et CE′ continuent de s'éloigner jusqu'à ce qu'ils se soient placés sur le prolongement l'un de l'autre, en CT et CT′ par exemple, il ne suffit plus de tenir compte de la différence des chemins parcourus, il faut en outre changer les signes des vitesses absolues d'un des faisceaux interférents, en affectant d'un signe contraire leur coefficient constant, ou, ce qui revient au même, ajouter une demi-ondulation à la différence des chemins parcourus.

Il est facile de sentir la raison de cette règle. Pour ne pas compliquer la figure, nous supposerons que les lignes qui y sont tracées, au lieu de représenter les plans de polarisation, indiquent la direction des vibrations lumineuses qui leur sont perpendiculaires; c'est comme si nous avions fait tourner la figure d'un quart de circonférence autour de son centre C; cela ne change rien aux positions relatives des plans de polarisation. Considérons, en un point quelconque du rayon lumineux projeté en C, la vitesse absolue qui anime les molécules éthérées à un instant déterminé dans le faisceau primitif, dont les vibrations s'exécutent suivant PP'; et supposons qu'à cet instant la molécule C soit poussée de C vers P, c'est-à-dire que la vitesse absolue agisse dans le sens CP: ses composantes suivant CO et CE' agiront, l'une dans le sens CO et l'autre dans le sens CE'. Or, d'après le principe général des petits mouvements, ces composantes sont les vitesses absolues dans les deux systèmes d'ondes qui résultent de la décomposition du premier. Si l'on suppose OO' et EE' rectangulaires, comme cela a lieu pour les directions des vibrations ordinaires et extraordinaires dans un cristal doué de la double réfraction, la composante CO sera égale à la première vitesse absolue multipliée par cos. i, et la composante CE' à la même vitesse multipliée par sin. i. On est ainsi conduit à une explication bien simple de la loi de Malus sur les intensités relatives des images ordinaire et extraordinaire, en passant des vitesses absolues aux forces vives, qui sont proportionnelles à leurs carrés $\cos.^2 i$ et $\sin.^2 i$.

Mais revenons aux composantes CO et CE'. Si on les décompose chacune en deux autres suivant les directions SS' et TT', il en résultera pour la première CO, deux vitesses

agissant dans les sens CS et CT, et pour la seconde CE', deux composantes agissant dans les sens CS et CT'. On voit que dans le plan SS', les deux composantes définitives agissent dans le même sens et s'ajoutent; tandis qu'elles agissent en sens opposés dans le plan TT' et doivent être, en conséquence, affectées de signes contraires; ce qui justifie la règle que nous avions énoncée. Car ce que nous venons de dire s'applique également à tous les points pris sur le rayon projeté en C, et par conséquent au coefficient constant qui multiplie toutes les vitesses absolues de chaque système d'ondes. Cette loi, dont l'énoncé a pu paraître compliqué au premier abord, n'est au fond, comme on voit, qu'une conséquence très-simple de la décomposition des forces (1).

Les principes de l'interférence des rayons polarisés que nous venons d'établir suffisent pour l'explication et le calcul

---

(1) Je crois inutile de donner ici l'explication de la quatrième loi de l'interférence des rayons polarisés, qui est une conséquence de celle-ci, comme je l'ai montré dans la note jointe au rapport de M. Arago, page 104 du tome XVII des *Annales de chimie et de physique :* cette loi consiste en ce que les rayons qui ont été polarisés à angle droit et sont ramenés ensuite à un même plan de polarisation, ne peuvent présenter des phénomènes d'interférence qu'autant que le faisceau primitif a reçu une polarisation préalable. Ce n'est pas qu'ils n'exercent nécessairement une influence mutuelle les uns sur les autres dès qu'une fois leurs mouvements vibratoires sont ramenés à une direction commune; mais la lumière qui n'a reçu aucune polarisation préalable, et qu'on peut considérer comme la réunion d'une infinité de systèmes d'ondes polarisés dans tous les sens, lorsqu'on l'analyse avec un rhomboïde de spath calcaire après son passage au travers d'une lame cristallisée, produit à-la-fois dans chacune des deux images des effets opposés qui se masquent mutuellement, ainsi qu'il est aisé de le conclure de la loi que nous venons d'expliquer.

de tous les phénomènes de coloration des lames cristallisées. Nous pourrions donc borner ici le développement de ces considérations, dont l'objet spécial était de donner la démonstration théorique des règles sur lesquelles repose le calcul des teintes des lames cristallisées. Nous pensons néanmoins qu'il ne sera pas inutile de montrer ici quelques-unes des conséquences les plus simples de ces principes.

Je suppose qu'un faisceau de rayons polarisés tombe perpendiculairement sur une lame cristallisée située dans le plan de la figure. Soit toujours PP′ la direction parallèlement à laquelle s'exécutent les vibrations du faisceau incident; soient OO′ et EE′ celles des vibrations des faisceaux ordinaire et extraordinaire en lesquels il se divise après avoir pénétré dans le cristal. Supposons que cette lame cristallisée soit assez mince pour qu'il n'y ait pas de différence de marche sensible entre les deux faisceaux émergents, ou qu'elle ait une épaisseur telle que la différence de marche contienne un nombre entier d'ondulations, ce qui revient au même: tous les points pris sur le rayon projeté en C, par exemple, seront sollicités simultanément dans les deux systèmes d'ondes par des vitesses qui répondront aux mêmes époques du mouvement oscillatoire; elles auront donc en chaque point du rayon le même rapport d'intensité, celui des coefficients constants des vitesses absolues des deux systèmes d'ondes; par conséquent, leurs résultantes seront parallèles, et se projetteront toutes suivant PP′, puisque ces composantes seront toutes deux à deux dans le rapport de cos. i à sin. i. Ainsi la lumière provenant de la réunion des deux faisceaux émergents sera encore polarisée, puisque toutes ses vibrations s'exécuteront dans des directions parallèles, et son

plan de polarisation sera le même que celui du faisceau incident.

Supposons maintenant que la différence de marche des faisceaux ordinaire et extraordinaire, au sortir du cristal, soit d'une demi-ondulation ou d'un nombre impair de demi-ondulations; c'est comme si, la différence de marche étant nulle, on changeait de signe toutes les vitesses absolues d'un des deux systèmes d'ondes; ainsi, la vitesse qui sollicite la molécule C à un certain instant, dans le premier faisceau, la poussant de C vers O, par exemple, celle qui est appliquée par le second faisceau, au lieu de pousser cette molécule de C vers E′, comme dans le cas précédent, la poussera de C vers E; en sorte que la résultante de ces deux impulsions, au lieu d'être dirigée suivant CP, le sera suivant une ligne située de l'autre côté de CO et faisant avec celle-ci un angle égal à l'angle i compris entre CO et CP. Il en sera de même pour tous les autres points pris le long du rayon projeté en C. Ainsi, la lumière totale composée des deux faisceaux émergents sera encore polarisée en sortant du cristal, puisque toutes ses vibrations seront parallèles à une direction constante; mais son plan de polarisation, au lieu de coïncider avec le plan primitif, comme dans le cas précédent, s'en trouvera éloigné d'un angle égal à $2\,i$. C'est cette nouvelle direction du plan de polarisation que M. Biot a appelée *l'azimut* $2\,i$.

On voit avec quelle simplicité la théorie que nous venons d'exposer explique comment la réunion de deux faisceaux de lumière polarisée à angle droit, l'un parallèlement, l'autre perpendiculairement à la section principale du cristal, forment par leur réunion une lumière polarisée dans le plan

primitif ou dans l'azimut $2i$, selon que la différence de marche entre les deux faisceaux est égale à un nombre pair ou impair de demi-ondulations. Nous n'imaginons pas comment on pourrait concevoir dans le système de l'émission ce phénomène remarquable, qu'on ne saurait cependant révoquer en doute, lorsqu'il a été mis en évidence par une expérience aussi décisive que celle des deux rhomboïdes, rapportée dans le tome XVII des *Annales de chimie et de physique*, page 94 et suivantes.

Considérons maintenant le cas où la différence de marche n'est plus un nombre entier de demi-ondulations; alors les vitesses correspondantes dans les deux systèmes d'ondes ne sont plus appliquées simultanément aux mêmes points du rayon projeté en C; il en résulte que les deux forces qui sollicitent chacun de ces points au même instant, n'ont pas le même rapport de grandeur tout le long du rayon, et conséquemment que leurs résultantes ne sont plus dirigées suivant un même plan : alors la réunion des deux systèmes d'ondes ne présente plus les caractères de la lumière polarisée. Appelons a leur différence de marche; les coefficients constants de leurs vitesses absolues sont respectivement égaux à cos. i et sin. i, en prenant pour unité celui du faisceau primitif, dont les vibrations s'exécutent parallèlement à PP′. Ainsi, les vitesses absolues apportées par les deux faisceaux composants au même point du rayon projeté en C, à l'instant t, seront $\cos.i.\sin.2\pi(t)$, et $\sin.i\sin.2\pi\left(t-\frac{a}{\lambda}\right)$; et le carré de la résultante de ces deux forces rectangulaires sera égal à

$$\cos.^2 i.\sin.^2 2\pi t + \sin.^2 i.\sin.^2 2\pi\left(t-\frac{a}{\lambda}\right) \ldots\ldots (A).$$

Cette formule peut donner aussi les écarts de la molécule vibrante relativement à sa position d'équilibre, en changeant le temps t d'un quart de circonférence, ou le point de départ commun d'un quart d'ondulation; car ces écarts suivent la même loi que les vitesses, avec cette seule différence que la vitesse est nulle au moment où la molécule se trouve le plus loin de sa position d'équilibre, et que l'instant où elle passe par cette position est celui du *maximum* de sa vitesse.

Par la même raison, les écarts de la molécule vibrante mesurés parallèlement aux directions rectangulaires OO′ et EE′, sont proportionnels aux expressions

$$\cos.i.\cos.2\pi t, \text{ et } \sin.i.\cos.2\pi\left(t-\frac{a}{\lambda}\right).$$

Si l'on veut calculer la courbe décrite par la molécule en la rapportant à des coordonnées parallèles à OO′ et EE′, il suffit d'écrire

$$\cos.i.\cos.2\pi t=x, \text{ et } \sin.i.\cos.2\pi\left(t-\frac{a}{\lambda}\right)=y,$$

et d'éliminer t entre ces deux équations, ce qui donne :

$$x^2.\sin.^2i+y^2.\cos.^2i-2xy.\sin.i.\cos.i.\cos.\frac{2\pi a}{\lambda}=$$
$$\sin.^2i.\cos.^2i.\sin.^2\frac{2\pi a}{\lambda};$$

équation d'une courbe du second degré rapportée à son centre. Sans discuter cette équation, on est certain d'avance que la courbe ne peut être qu'une ellipse, puisque les excursions de la molécule dans le sens des x et des y ont pour limites les constantes sin. i et cos. i.

Cette courbe devient un cercle lorsque i étant égal à 45°,

a contient un nombre impair de quarts d'ondulation, ou en d'autres termes, lorsque les deux systèmes d'ondes polarisés à angle droit, sont de même intensité et diffèrent dans leur marche d'un nombre impair de quarts d'ondulation : on a alors

$$\sin. i = \cos. i = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \cos. 2\pi\frac{a}{\lambda} = 0, \text{ et } \sin. 2\pi\frac{a}{\lambda} = 1 ;$$

ce qui réduit l'équation ci-dessus à

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Il était facile d'arriver à la même conséquence sans le secours de l'équation générale, en faisant attention que, puisque dans ce cas particulier

$$\sin. i = \cos. i, \text{ et } \cos. 2\pi\left(t - \frac{a}{\lambda}\right) = \sin. 2\pi . t,$$

les deux coordonnées $\cos. i . \cos. 2\pi t$, et $\sin. i . \cos. 2\pi\left(t - \frac{a}{\lambda}\right)$, sont toujours proportionnelles au sinus et au cosinus du même angle variable $2\pi t$.

Une autre particularité remarquable du mouvement oscillatoire dans le même cas, c'est que la vitesse de la molécule est uniforme. En effet, la formule (A), qui exprime le carré de cette vitesse, devient,

$$\tfrac{1}{2}\sin.^2 2\pi t + \tfrac{1}{2}\cos.^2 2\pi t, \text{ ou } \tfrac{1}{2}.$$

Ce mouvement circulaire uniforme a lieu dans le même sens pour toutes les molécules situées le long du rayon projeté en C; mais elles n'occupent pas au même instant les points correspondants des circonférences qu'elles décrivent; c'est-

à-dire que les molécules qui, dans leur état de repos, se trouvaient sur la droite projetée en C, au lieu de rester sur une droite parallèle à celle-ci et qui décrirait autour d'elle un cylindre à base circulaire, forment une hélice dont le rayon est celui des petits cercles décrits par les molécules vibrantes, et dont le pas est égal à la longueur d'ondulation. Si l'on fait tourner cette hélice autour de son axe d'un mouvement uniforme, de manière qu'elle décrive une circonférence dans l'intervalle de temps pendant lequel s'accomplit une ondulation lumineuse, et que l'on conçoive en outre que, dans chaque tranche infiniment mince perpendiculaire aux rayons, toutes les molécules exécutent les mêmes mouvements que le point correspondant de l'hélice et conservent les mêmes situations respectives, on aura une idée juste du genre de vibration lumineuse que j'ai proposé de nommer *polarisation circulaire*, en appelant *polarisation rectiligne* celle qui a été remarquée pour la première fois par Huygens dans la double réfraction du spath d'Islande, et que Malus a reproduite par la simple réflexion sur la surface des corps transparents.

Ces vibrations circulaires s'exécutent tantôt de droite à gauche et tantôt de gauche à droite, selon que le plan de polarisation du système d'ondes en avant est à droite ou à gauche de celui du système d'ondes en arrière, la différence de marche étant égale à un quart d'ondulation ou à un nombre entier d'ondulations plus un quart; c'est l'inverse quand elle est de trois quarts d'ondulation, ou d'un nombre entier d'ondulations plus trois quarts.

Il est certains milieux réfringents, tels que le cristal de roche, dans la direction de son axe, les essences de térébenthine, de citron, etc., qui ont la propriété de ne pas transmettre

avec la même vitesse les vibrations circulaires de droite à gauche et celles de gauche à droite. On conçoit que cela peut résulter d'une constitution particulière du milieu réfringent ou de ses molécules intégrantes, qui établit une différence entre le sens de droite à gauche et celui de gauche à droite; tel serait, par exemple, un arrangement héliçoïdal des molécules du milieu, qui offrirait des propriétés inverses selon que ces hélices seraient *dextrorsum* ou *sinistrorsum*.

La définition mécanique que nous venons de donner de la polarisation circulaire fait concevoir comment peut avoir lieu la double réfraction singulière que le cristal de roche présente dans le sens de son axe; c'est que l'arrangement des molécules de ce cristal n'est pas le même apparemment de droite à gauche et de gauche à droite; en sorte que le faisceau lumineux dont les vibrations circulaires s'exécutent de droite à gauche, met en jeu une élasticité ou force de propagation un peu différente de celle qui est excitée par l'autre faisceau, dont les vibrations s'exécutent de gauche à droite.

Voilà le principal avantage théorique qu'on peut retirer des considérations géométriques que nous venons d'exposer sur les vibrations circulaires de la lumière résultant de la combinaison de vibrations rectilignes. Mais, dans le calcul des phénomènes que présente la lumière polarisée rectilignement ou circulairement après avoir traversé les milieux qui la modifient, il est inutile de chercher, par exemple, quelles sont les vibrations curvilignes résultant de la réunion des deux systèmes d'ondes qui sortent d'une lame cristallisée: on est obligé au contraire de décomposer en mouvements rectilignes les vibrations circulaires des deux systèmes d'ondes sortant d'une plaque de cristal de roche perpendiculaire à

l'axe, quand on veut connaître les intensités des images ordinaire et extraordinaire que produit cette lumière émergente à travers un rhomboïde de spath calcaire. Les calculs des intensités des images ordinaire et extraordinaire, pour une lumière homogène, ou celui des teintes développées par la lumière blanche polarisée, ramènent toujours à la considération des vibrations rectilignes et à l'emploi des formules d'interférences qui s'y rapportent.

En indiquant la cause mécanique de la double réfraction toute particulière que le cristal de roche exerce sur la lumière suivant son axe, nous nous sommes écarté de l'objet de ce mémoire, où nous traiterons seulement le cas dans lequel les particules du milieu vibrant ont leurs faces homologues parallèles, et présentent ainsi le même arrangement moléculaire de droite à gauche et de gauche à droite. Nous espérons que le lecteur nous pardonnera cette digression sur la polarisation circulaire, à laquelle nous conduisait naturellement ce que nous venions de dire sur la polarisation rectiligne. Il est d'ailleurs utile de se familiariser avec ces divers modes de vibrations lumineuses qu'on retrouve tous dans la double réfraction la plus simple, telle que celle des cristaux à un axe, dès qu'au lieu de séparer par la pensée les ondes ordinaires des ondes extraordinaires, on considère l'effet complexe qui résulte de leur existence simultanée.

Après avoir prouvé que la direction transversale des vibrations lumineuses est une conséquence nécessaire de l'absence des phénomènes ordinaires d'interférence dans la réunion des rayons polarisés à angle droit, il faut montrer que cette hypothèse établie par les faits, dans le système des ondes, n'est point contraire aux principes de la mécanique, et

expliquer comment de pareilles vibrations peuvent se propager dans un fluide élastique.

Possibilité de la progagation des vibrations transversales dans un fluide élastique.

Tous les physiciens conçoivent un fluide élastique comme l'assemblage de molécules ou points matériels séparés par des intervalles très-grands relativement aux dimensions de ces molécules, ainsi maintenues à distance par des forces répulsives qui font équilibre à d'autres forces contraires résultant de l'attraction mutuelle des molécules ou d'une compression exercée sur le fluide. Cela posé, pour fixer les idées, imaginons l'arrangement régulier de molécules représenté par la figure 2, et considérons le cas d'une onde plane et indéfinie dont la surface serait parallèle au plan projeté suivant AB. Si la partie du milieu supérieure à ce plan a éprouvé un petit déplacement parallèle à la file de molécules AMB, ces molécules se trouveront sollicitées à prendre un mouvement semblable. En effet, considérons une d'elles en partilier, la molécule M, par exemple, et examinons quel changement s'est opéré dans les actions exercées sur elle par la partie supérieure du milieu. Et d'abord, je remarque qu'elles seront les mêmes que si c'était la molécule M qui se fût déplacée de la même quantité et dans la même direction, la partie supérieure du milieu étant restée immobile. Je suppose donc que M se soit déplacée dans la direction AB d'une très-petite quantité M*m*. Les molécules E et F, par exemple, situées à égale distance de M et de la perpendiculaire MG, élevée sur AB, agissaient également sur la molécule M dans le sens MA et dans le sens MB, avant son déplacement; c'est-

à-dire que les composantes de leurs actions suivant AB se détruisaient mutuellement, tandis que les composantes perpendiculaires s'ajoutaient, mais étaient balancées par les actions contraires des molécules E′ et F′, situées au-dessous de AB. Lorsque le point matériel M est transporté en m, les composantes parallèles à AB des deux actions exercées sur lui par les molécules E et F, ne sont plus généralement égales entre elles, et les petits changements qu'elles ont éprouvés, ou leurs différentielles, agissent dans le même sens, et tendent à ramener le point m dans sa position primitive M, si c'était celle d'un équilibre stable.

En effet, représentons par $\varphi(r)$ l'action qu'exerce une molécule située à une distance r, telle que les molécules E et F. Prenons M pour origine des coordonnées, et les droites AB et MG pour axes des x et des y : représentons par x et y les coordonnées du point F; celles de E seront y et x. Les distances EM et FM, ou r, sont égales à $\sqrt{x^2+y^2}$, et par conséquent les forces qui agissent suivant FM et suivant EM sont l'une et l'autre représentées par $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$. De plus, le sinus de l'angle FMB est égal à $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et son cosinus à $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; donc les deux deux composantes de la force dirigée suivant FM sont, parallèlement aux x, $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$, ou, $x\psi(x^2+y^2)$, et parallèlement aux y, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$, ou, $y\psi(x^2+y^2)$, si l'on adopte pour le sens positif des forces parallèles aux axes des coordonnées celui dans lequel agit chacune de ces deux composantes. De même, les composantes de l'action exercée par la molécule E sont respectivement $-x\psi(x^2+y^2)$, et $y\psi(x^2+y^2)$; c'est-à-dire, qu'elles ne diffèrent des premières que par le signe de x. Maintenant, pour

calculer les petites quantités dont ces composantes ont changé par le déplacement du point M, il faut différentier leurs expressions relativement à x; on trouve ainsi, pour les différentielles des composantes de la force FM :

parallèlement aux x..... $[\psi(x^2+y^2)+2x^2\psi'(x^2+y^2)]dx$;
parallèlement aux y..... $2xy\psi'(x^2+y^2)dx$.

L'expression de la force EM ne différant de celle de la force FM que par le signe de x, on peut obtenir immédiatement les variations de ses composantes en changeant simplement le signe de x dans les deux expressions ci-dessus, sans changer, bien entendu, celui du petit déplacement dx, qui a lieu dans le même sens pour les deux forces. Or, on voit à la seule inspection des formules, que la différentielle de la composante parallèle aux x conservera le même signe et s'ajoutera par conséquent à celle de la force FM, tandis que la différentielle de la composante parallèle aux y se retranchera de la variation correspondante de l'autre force, et la détruira. Il résulte donc du petit déplacement du point M, suivant AB, une force parallèle à la même direction, et qui tend à ramener ce point vers sa position d'équilibre. Par conséquent, si le point M restant fixe, on déplace un peu la partie supérieure du milieu parallèllement à AB (ce qui revient au même), le point M sera poussé suivant la direction AB, ainsi que toutes les autres molécules de cette tranche : elle sera donc sollicitée dans toute son étendue à glisser suivant son plan AB. Par le déplacement de cette tranche, le même effet sera produit successivement sur les tranches parallèles A'B', A''B'', etc.; et c'est ainsi que les vibrations transversales de l'onde incidente pourront se transmettre dans toute l'étendue du milieu.

La force qui pousse le point M, suivant AB, par suite du déplacement de la tranche E et des tranches supérieures glissant dans leurs plans, est due à ce que leurs éléments matériels ne sont pas contigus; s'ils l'étaient, chaque point M de la tranche AB resterait indifférent au simple glissement des tranches supérieures, qui n'apporterait alors aucun changement dans l'action qu'elles exercent sur ce point. Mais si le déplacement de ces tranches avait lieu dans la direction perpendiculaire GM, il est clair que la contiguité des éléments de chacune d'elles n'empêcherait pas que la force avec laquelle ils tendent à repousser chaque point de AB n'augmentât à mesure que la distance diminuerait. Ainsi, dans cette supposition, la résistance que les tranches opposeraient à leur rapprochement serait infiniment plus grande que la force nécessaire pour faire glisser une tranche indéfinie.

Sans aller jusqu'à cette limite, qui n'est pas sans doute dans la nature, on peut supposer que la résistance de l'éther à la compression est beaucoup plus grande que la force qu'il oppose aux petits déplacements de ces tranches suivant leurs plans; or, à l'aide de cette hypothèse, il est possible de concevoir comment les molécules de l'éther n'auraient d'oscillations sensibles que parallèllement à la surface des ondes lumineuses.

Comment il peut se faire que les molécules de l'éther n'éprouvent point d'agitation sensible dans la direction de la normale à l'onde.

En effet, la résistance à la compression étant bien plus grande que l'autre force élastique qui est mise en jeu par le simple glissement des tranches, l'onde produite par la pre-

mière s'étendra beaucoup plus loin que celle qui résultera de la seconde, pendant la même oscillation de la particule éclairante dont les vibrations agitent l'éther; ainsi, lors même que les petits mouvements des molécules de ce fluide s'exécuteraient de manière que leurs forces vives se partageassent également entre les deux modes de vibration, les forces vives comprises dans l'onde condensante ou dilatante se trouvant distribuées sur une bien plus grande étendue du fluide que celles de l'autre onde, les oscillations parallèles aux rayons auraient bien moins d'amplitude que les oscillations perpendiculaires, et par conséquent ne pourraient imprimer au nerf optique que des vibrations beaucoup plus petites; car l'amplitude de ses vibrations ne peut pas excéder celle des vibrations de l'éther qui le baigne. Or, il est naturel de supposer que l'intensité de la sensation dépend de l'amplitude des vibrations du nerf optique, et qu'ainsi la sensation de lumière résultant des vibrations normales aux ondes serait sensiblement nulle relativement à celle qui serait produite par les vibrations parallèles à leur surface.

D'ailleurs on peut concevoir que pendant l'oscillation de la molécule éclairante, l'équilibre de tension se rétablisse si promptement entre la partie de l'éther dont elle se rapproche et celle dont elle s'éloigne, qu'il n'y ait jamais ni condensation ni dilatation sensible, et que le déplacement des molécules éthérées qui l'environnent se réduise à un mouvement circulaire oscillatoire qui les porte sur la surface sphérique de l'onde, du point dont la molécule éclairante se rapproche vers celui dont elle s'éloigne.

Je crois avoir suffisamment démontré qu'il n'y a point d'absurdité mécanique dans la définition des vibrations lumineuses que les propriétés des rayons polarisés m'ont forcé

d'adopter, et qui m'a fait découvrir les véritables lois de la double réfraction. Si les équations du mouvement des fluides imaginées par les géomètres ne peuvent pas se concilier avec cette hypothèse, c'est qu'elles reposent sur une abstraction mathématique, la contiguité des éléments, qui, sans être vraie, peut représenter cependant une partie des propriétés mécaniques des fluides élastiques, quand on admet en outre que ces éléments contigus sont compressibles. Mais par cela même qu'elle n'a point de réalité, et n'est qu'une pure abstraction, on ne doit pas s'attendre à y trouver tous les genres de vibrations dont les fluides élastiques sont susceptibles, et toutes leurs propriétés mécaniques; c'est ainsi, par exemple, que d'après les équations dont nous parlons, il n'y aurait aucun frottement entre deux tranches fluides indéfinies qui glissent l'une sur l'autre. Il serait donc bien peu philosophique de rejeter une hypothèse à laquelle les phénomènes de l'optique conduisent si naturellement, par cela seul qu'elle ne s'accorde pas avec ces équations.

Comment les vibrations transversales s'éteignent à l'extrémité des ondes.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des ondes indéfinies: supposons les limitées, et examinons ce qui se passe à leurs extrémités, en admettant que l'éther est sensiblement incompressible. Je suppose qu'une partie de l'onde AE, fig. 3, ait été arrêtée par un écran EC; soit M un point situé derrière l'écran, à une distance très-grande relativement à la longueur d'une ondulation: pour peu que l'angle TEM de la droite EM avec le rayon direct ET soit sensible, la lu-

mière envoyée en M sera très-petite, comme on le sait par expérience, et comme on le conclut aisément de la théorie de la diffraction. Si donc l'angle TEM est un peu grand, le point M sera presque en repos, tandis que le point T et tout le reste de l'onde ST éprouveront des oscillations sensibles suivant le plan STM. Il semblerait qu'il doit en résulter des condensations et des dilatations alternatives de l'éther entre T et M; mais remarquons d'abord qu'au même instant où la face *ce* du petit parallélipipède *cdef* est poussée vers M par la demi-ondulation dont le milieu répond à ST, les faces homologues *ck, eg* des deux parallélipipèdes contigus s'éloignent de M par les mouvements contraires des deux demi-ondulations dont les milieux répondent aux lignes *st, s't'*; en sorte que tandis que le volume de *cdef* diminue, ceux des deux parallélipipèdes semblables, entre lesquels il est situé augmentent de la même quantité, et ainsi de suite dans la direction *kg*. Si donc l'éther résiste beaucoup à la compression, il est possible que l'équilibre de tension se rétablisse continuellement, et presque instatanément entre les éléments voisins, parallèlement à *gk*. D'ailleurs, les points qui restent immobiles pendant les oscillations des extrémités des ondes, sont assez éloignés de ET pour que les déplacements moléculaires occasionnés par ces oscillations, diminuent très-lentement jusqu'aux points qu'on peut regarder comme immobiles; en sorte que les condensations et les dilatations des tranches consécutives seraient presque insensibles, lors même que l'équilibre de pression ne se rétablirait pas rapidement d'une tranche à l'autre.

Démonstration de deux théorémes de statique sur lesquels repose l'explication mécanique de la double réfraction.

Après avoir déduit des faits l'hypothèse que j'ai adoptée sur la nature des vibrations lumineuses, et avoir prouvé qu'elle n'est point en opposition avec les principes de la mécanique, je vais démontrer deux théorêmes de statique générale sur lesquels repose l'explication théorique des lois mathématiques de la double réfraction.

1er THÉORÊME.

Dans un système quelconque de molécules en équilibre, et quelle que soit la loi de leurs actions réciproques, le déplacement très-petit d'une molécule dans une direction quelconque produit une force répulsive égale en grandeur et en direction à la résultante des trois forces répulsives qui seraien. produites séparément par trois déplacements rectangulaires de ce point matériel égaux aux composantes statiques du premier déplacement.

En effet, soit M, fig. 4, un des points matériels du système moléculaire; lorsque l'équilibre vient à être troublé par le petit déplacement MC de la molécule M, la résultante de toutes les forces exercées sur elle, qui auparavant était égale à zéro, acquiert une certaine valeur; pour la calculer, il suffit de déterminer les variations que ces forces ont éprouvées en grandeur et en direction, et de chercher la résultante de toutes ces différentielles. Cela posé, je considère l'action particulière d'une autre molécule quelconque N sur le point M déplacé d'une quantité MC que je suppose très-petite relativement à la distance MN qui sépare les deux molécules

J'élève sur MN la perpendiculaire MS dans le plan CMN; si l'on joint CN, CP sera la petite quantité dont la distance MN a augmenté ou la différentielle de la distance, et $\frac{MP}{MN}$ sera le sinus du petit angle dont la direction de la force a varié. Si donc on rapporte la première force et la nouvelle aux deux directions rectangulaires MR et MS, la différentielle suivant MR ne proviendra que de la petite augmentation CP de la distance et sera proportionnelle à CP, tandis que la différentielle suivant MS résultera uniquement du petit changement de direction de la force et sera proportionelle à $\frac{MP}{MN}$, ou simplement à MP, la distance MN restant la même : ainsi la première différentielle peut être représentée par $A \times CP$ et la seconde par $B \times MP$, A et B étant deux facteurs qui restent constans tant qu'il s'agit de l'action exercée par la même molécule N.

Ne considérons encore que l'action particulière de cette molécule, et supposons que M soit déplacée successivement suivant trois directions rectangulaires, et de quantités égales aux projections de MC sur ces trois directions : par le point M menons un plan perpendiculaire à MN, qui coupera celui de la figure, c'est-à-dire le plan NMC, suivant la droite MS. Le déplacement MC a produit les deux forces différentielles $A \times CP$ et $B \times MP$, la première dirigée suivant MR, et la seconde suivant la ligne MS : les déplacements sur les trois directions rectangulaires quelconques, que nous concevons dans l'espace, produiront de même chacune une force différentielle parallèle à MR avec une autre force perpendiculaire à cette ligne, et comprise ainsi dans le plan normal MS mené par le point M : on aura la première en

multipliant par le même coëfficient A la distance de la nouvelle position de la molécule au plan normal, et la seconde en multipliant par le même coëfficient B la distance de M au pied de la perpendiculaire abaissée de cette nouvelle position sur le plan normal. Cela posé, cherchons la résultante des trois forces différentielles parallèles à MR, qui ont le même coëfficient A, et la résultante des trois forces différentielles contenues dans le plan normal, qui ont B pour coëfficient commun. Les déplacements en question étant les projections du déplacement MC sur les trois directions rectangulaires que l'on a choisies, la somme de leurs projections sur la direction MR doit être égale à CP, et par conséquent la résultante des trois forces différentielles parallèles à MR sera égale à $A \times CP$, c'est-à-dire à la force que le déplacement MC produit dans cette direction. Il est aisé de voir pareillement que la résultante des trois forces différentielles comprises dans le plan normal, est égale à $B \times MP$. En effet, elles ont pour expression le même coëfficient B, multiplié par les projections des trois déplacements rectangulaires sur ce plan; ainsi, chercher leur résultante, c'est chercher la résultante statique de ces trois projections considérées comme représentant des forces : or, sous ce point de vue, les trois déplacements rectangulaires sont les composantes statiques du déplacement MC, et par conséquent leurs projections sur le plan normal MS les composantes statiques de MP, qui est donc leur résultante; ainsi la résultante des trois forces différentielles contenues dans le plan normal, est dirigée suivant MP, et représentée par $B \times MP$, c'est-à-dire qu'elle est égale en grandeur et en direction à la force différentielle provenant du déplacement MC comprise dans le même plan normal.

Donc enfin, l'on trouve la molécule M sollicitée par les mêmes forces différentielles, soit qu'on lui fasse éprouver le petit déplacement MC, ou qu'en la supposant successivement déplacée dans trois directions rectangulaires et de quantités égales aux composantes statiques de MC suivant ces directions, on cherche la résultante des forces produites par ces trois déplacements rectangulaires.

Ce principe étant vrai pour l'action exercée par la molécule N, l'est également pour celles que toutes les autres molécules du milieu exercent sur M : ainsi il est vrai de dire que la résultante de toutes les petites forces provenant du déplacement MC, ou l'action totale du milieu sur la molécule M après son déplacement, est égale à la résultante des forces que produiraient séparément trois déplacements rectangulaires égaux aux composantes statiques du déplacement MC.

2e THÉORÊME.

Dans un système quelconque de molécules ou points matériels en équilibre, il y a toujours pour chacun d'eux trois directions rectangulaires suivant lesquelles tout petit déplacement de ce point, en changeant un peu les forces auxquelles il est soumis, produit une résultante totale dirigée dans la ligne même de son déplacement.

Pour démontrer ce théorême, je rapporte d'abord les diverses directions des petits déplacements de la molécule à trois axes rectangulaires pris arbitrairement, qui seront les axes des coordonnées x, y et z. Je suppose qu'on déplace successivement la molécule suivant ces trois directions, de

la même petite quantité, que je prends pour unité de ces déplacements différentiels; j'appelle a, b, c, les trois composantes selon ces axes de la force excitée par le déplacement parallèle aux x; a', b', c', les trois composantes de la force excitée par le déplacement parallèle aux y; et enfin a'', b'', c'', les composantes de la force produite par le déplacement parallèle aux z.

Pour avoir la force qui résulte d'un petit déplacement égal à 1, suivant une autre direction quelconque faisant des angles X, Y, Z avec les axes des x, des y et des z, il faut d'abord, d'après le théorême précédent, prendre sur ces axes les composantes statiques du déplacement, qui seront respectivement cos. X, cos. Y, cos. Z, et déterminer les forces produites séparément par chacun de ces déplacements; puis calculer la résultante de toutes ces forces.

Or, pour avoir les composantes de la force que produit le déplacement suivant l'axe des x égal à cos. X, il faut multiplier successivement cos. X par les coëfficients a, b, c, puisqu'ils représentent les composantes de la force excitée par un déplacement égal à 1, et que, comme il ne s'agit ici que de variations très-petites, les forces développées sont proportionnelles aux longueurs de ces déplacements différentiels: ainsi les composantes de la force résultant du déplacement cos. X sont,

parallèlement aux..... x , y , z ,
a cos. X, b cos. X, c cos. X;

de même, les composantes de la force produite par le déplacement cos. Y, suivant l'axe des y, sont,

parallèlement aux..... x , y , z ,
a' cos. Y, b' cos. Y, c' cos. Y;

et les composantes de la force excitée par le déplacement cos. Z, opéré suivant l'axe des z, sont,

parallèlement aux..... x , y , z ,
a'' cos. Z, b'' cos. Z, c'' cos. Z.

En ajoutant entre elles les composantes dirigées suivant le même axe, on a donc pour les composantes totales :

parallèlement aux x... a cos. X+a' cos. Y+a'' cos. Z;
parallèlement aux y... b cos. X+b' cos. Y+b'' cos. Z;
parallèlement aux z... c cos. X+c' cos. Y+c'' cos. Z.

Ces composantes déterminent la grandeur et la direction de la résultante totale.

On pourrait croire au premier abord que les neuf constantes a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', sont indépendantes; mais il est aisé de reconnaître qu'il existe entre elles une relation qui en réduit le nombre à six.

En effet, soient Ax, Ay, Az (fig. 5.), les trois axes rectangulaires suivant lesquels la molécule A est successivement déplacée d'une quantité très-petite égale à l'unité : soit AP la direction dans le prolongement de laquelle se trouve placé un autre point matériel M qui agit sur A, et que je suppose toujours éloigné de ce point d'une quantité très-grande relativement à l'étendue des déplacements. Supposons d'abord qu'on le déplace dans la direction des x d'une quantité AB égale à l'unité; ce petit déplacement fera varier à la fois la direction et l'intensité de la force exercée par le

point M, en rapprochant l'autre molécule : si du point B l'on abaisse sur la direction APM la perpendiculaire BQ, AQ sera la variation de la distance, et l'on pourra considérer BQ comme proportionnel à la variation de la direction. La première variation produira une force différentielle $A \times AQ$ dirigée suivant APM, et la seconde une force différentielle $B \times BQ$, dirigée suivant BQ, les coëfficients A et B restant constants tant qu'il s'agit de l'action exercée par la même molécule M.

Pour fixer le sens dans lequel ces forces différentielles poussent le point A, supposons que la molécule M exerce sur ce point une action répulsive. La distance AM étant diminuée de AQ, cette action est augmentée, et la différentielle $A \times AQ$ agit dans le sens MA : de même, la différentielle $B \times BQ$ résultant du petit changement de direction de la force, agit dans le sens QB. Si donc on regarde comme positifs les sens d'action Ax, Ay et Az, pour les forces parallèles aux axes des coordonnées, la composante parallèle aux x de cette seconde différentielle sera négative, tandis que les composantes parallèles aux y et aux z seront positives, ainsi que les trois composantes rectangulaires de la première différentielle.

Cherchons maintenant les composantes des deux forces différentielles, et d'abord celles de la première $A \times AQ$. Si nous représentons par X, Y, Z, les angles que la droite APM fait avec les axes des x, des y et des z, AB étant égal à 1 par hypothèse, $AQ = \cos.X$, et la force différentielle dirigée suivant AM est représentée par $A\cos.X$; ses composantes sont donc,

parallèlement aux x , y , z ,

$$A\cos.^2X,\quad A\cos.X\cos.Y,\quad A\cos.X\cos.Z.$$

Calculons actuellement les composantes de la seconde force différentielle $B\times BQ$ agissant suivant BQ. Puisque $AB=1$, $BQ=\sin.X$, et cette force est représentée par $B.\sin.X$. Je la décompose d'abord en deux autres forces dirigées, l'une suivant BA, et l'autre suivant BP perpendiculaire à BA : la première composante, qui est parallèle à l'axe des x, est égale à $-B.\sin.X\times\cos.ABQ$, ou $-B\sin.^2X$, et la seconde a pour valeur $B.\sin.X\times\sin.ABQ$, ou $B.\sin.X\cos.X$. Je décompose cette seconde composante en deux autres forces dirigées suivant EB et FB, c'est-à-dire, parallèlement aux axes des y et des z : la première sera égale à $B.\sin.X\cos.X\times\frac{BE}{BP}$, et la seconde à $B.\sin.X\cos.X\times\frac{BF}{BP}$; mais $\frac{BE}{BP}=\frac{\cos.Y}{\sin.X}$ et $\frac{BF}{BP}=\frac{\cos.Z}{\sin.X}$; ainsi les valeurs des composantes parallèles aux y et aux z deviennent respectivement $B.\cos.X\cos.Y$ et $B.\cos.X\cos.Z$. On a donc pour les trois composantes de la seconde force différentielle,

parallèlement aux.... x , y , z ,

$$-B.\sin.^2X,\quad B.\cos.X\cos.Y,\quad B.\cos.X\cos.Z.$$

Ajoutant ensemble les composantes parallèles des deux forces différentielles, on trouve pour les composantes totales,

parallèlement aux.... x , y , z ,

$$A\cos.^2X-B\sin.^2X,\quad (A+B)\cos.X\cos.Y,\quad (A+B)\cos.X\cos.Z.$$

Si l'on suppose maintenant le point matériel A déplacé

suivant l'axe des y d'une quantité égale à 1, on trouvera de même les composantes suivantes :

parallèlement aux.....y , x , z ,

$$A\cos.^2 Y - B\sin.^2 Y,\ (A+B)\cos. X\cos. Y,\ (A+B)\cos. Y\cos. Z;$$

Et pour un déplacement pareil dans la direction des z, on aura,

parallèlement aux.....z , x , y ,

$$A\cos.^2 Z - B\sin.^2 Z,\ (A+B)\cos. X\cos. Z,\ (A+B)\cos. Y\cos. Z.$$

La seule inspection des composantes des forces différentielles excitées par ces trois petits déplacements, montre que le déplacement parallèle aux x donne dans le sens des y la même composante que le déplacement parallèle aux y produit dans le sens des x, et donne dans le sens des z la même composante que le déplacement parallèle aux z produit dans le sens des x; et qu'enfin la composante parallèle aux z de la force excitée par le déplacement suivant l'axe des y, est égale à la composante parallèle aux y de la force excitée par le déplacement suivant l'axe des z; c'est-à-dire en général, *que la composante parallèle à un axe produite par le déplacement suivant un des deux autres, est égale à celle qui résulte parallèlement à celui-ci d'un déplacement semblable dans la direction du premier axe.*

Ce théorême étant démontré pour l'action individuelle de chaque molécule M sur le point A, l'est en conséquence pour la résultante des actions exercées par toutes les molécules du milieu sur le même point matériel : ainsi il existe toujours entre les neuf constantes, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', les trois relations suivantes,

$$b=a', \quad c=a'', \quad c'=b'';$$

ce qui réduit à six le nombre des constantes arbitraires.

Nous pouvons donc, en général, représenter ainsi qu'il suit les composantes des trois forces résultant des trois petits déplacements égaux à l'unité et opérés successivement suivant les axes des x, des y et des z :

pour le déplacement suivant l'axe des x,

composantes..... a, h, g,
parallèles aux..... x, y, z;

pour le déplacement suivant l'axe des y,

composantes..... b, h, f,
parallèles aux..... y, x, z;

et enfin pour le déplacement suivant l'axe des z,

composantes..... c, g, f,
parallèles aux..... z, x, y.

Ainsi les trois composantes d'un déplacement pareil dans une direction quelconque, faisant avec les axes des x, des y et des z, des angles égaux respectivement à X, Y, Z, seront :

parallèlement aux x... $a\cos.\mathrm{X}+h\cos.\mathrm{Y}+g\cos.\mathrm{Z}=p$,
parallèlement aux y... $b\cos.\mathrm{Y}+h\cos.\mathrm{X}+f\cos.\mathrm{Z}=q$,
parallèlement aux z... $c\cos.\mathrm{Z}+g\cos.\mathrm{X}+f\cos.\mathrm{Y}=r$.

Je vais démontrer maintenant qu'il existe toujours une direction pour laquelle la résultante de ces trois composantes coïncide avec cette même direction du déplacement; c'est-à-dire, qu'on peut donner aux angles X, Y, Z des valeurs réelles telles que la résultante des trois composantes fasse

avec les axes des x, des y et des z, des angles respectivement égaux à X, Y, Z; ou, en d'autres termes, telles que ces trois composantes soient entre elles dans le même rapport que les quantités cos. X, cos. Y, cos. Z.

Pour trouver la direction qui satisfait à cette condition, je vais substituer aux trois inconnues cos. X, cos. Y, cos. Z (qui se réduisent à deux par la relation $1 = \cos.^2 X + \cos.^2 Y + \cos.^2 Z$), les tangentes des angles que les projections de la droite sur les plans xz et yz font avec l'axe des z, afin de pouvoir conclure la réalité des angles de celle des valeurs des lignes trigonométriques données par le calcul. Soient donc $x = mz$ et $y = nz$ les équations de la droite : on aura $m = \frac{\cos. X}{\cos. Z}$ et $n = \frac{\cos. Y}{\cos. Z}$: or les trois composantes ci-dessus, que je représenterai par p, q, r, doivent être entre elles dans le même rapport que les quantités cos. X, cos. Y, cos. Z, pour satisfaire à la condition dont nous venons de parler.

On a donc, $\frac{p}{r} = \frac{\cos. X}{\cos. Z} = m$, et $\frac{q}{r} = \frac{\cos. Y}{\cos. Z} = n$; ou mettant à la place de p, q, r, leurs valeurs,

$$m = \frac{a \cos. X + h \cos. Y + g \cos. Z}{c \cos. Z + g \cos. X + f \cos. Y} = \frac{a \frac{\cos. X}{\cos. Z} + \frac{h \cos. Y}{\cos. Z} + g}{c + g \frac{\cos. X}{\cos. Z} + f \frac{\cos. Y}{\cos. Z}},$$

et,

$$n = \frac{b \cos. Y + h \cos. X + f \cos. Z}{c \cos. Z + g \cos. X + f \cos. Y} = \frac{b \frac{\cos. Y}{\cos. Z} + h \frac{\cos. X}{\cos. Z} + f}{c + g \frac{\cos. X}{\cos. Z} + f \frac{\cos. Y}{\cos. Z}};$$

ou enfin,

$$m = \frac{am + hn + g}{c + gm + fn} \ldots\ldots\ldots (1),$$

et

$$n = \frac{bn + hm + f}{c + gm + fn} \ldots\ldots\ldots (2).$$

On tire de l'équation (2), $m=\frac{-fn^2+(b-c)n+f}{gn-h}$; substituant cette valeur de m dans l'équation (1), et chassant les dénominateurs, on a :

$$g[-fn^2+(b-c)n+f]^2+fn(gn-h)[-fn^2+(b-c)n+f]+$$
$$c(-a)(gn-h)[-fn^2+(b-c)n+f]-hn(gn-h)^2-g(gn-h)^2=0.$$

Cette équation en n, qui, sous cette forme, paraît du quatrième degré, tombe au troisième dès qu'on effectue les multiplications, parce qu'alors les deux termes qui renferment n^4 se détruisent mutuellement; ainsi l'on est sûr qu'elle contient au moins une racine réelle. Il y a donc toujours une valeur réelle de n et partant une valeur réelle de m. Par conséquent, il y a toujours au moins une droite qui satisfait à la condition qu'un petit déplacement du point matériel suivant cette droite fait naître une force répulsive, résultante générale des actions moléculaires, dont la direction coïncide avec celle du déplacement. Nous appellerons *axes d'élasticité* les directions qui jouissent de cette propriété.

En partant de ce résultat, il est facile de prouver qu'il y a encore deux autres axes d'élasticité perpendiculaires entre eux et au premier. En effet, prenons celui-ci pour axe des x; les composantes parallèles aux y et aux z, produites par un déplacement dirigé suivant l'axe des x, seront nulles; ainsi l'on aura, $g=o$, $h=o$; et les équations (1) et (2) deviendront :

$$m(c-a+fn)=0,$$

et,

$$n^2-\left(\frac{b-c}{f}\right)n-1=0.$$

La première équation donne $m=0$; et la seconde donne

pour n deux valeurs qui sont toujours réelles, le dernier terme -1 étant une quantité négative. Ainsi l'on voit qu'outre l'axe des x, il y a encore deux autres axes d'élasticité : ils sont perpendiculaires à l'axe des x, puisque pour l'un et l'autre $m=0$, c'est-à-dire que leurs projections sur le plan des xz se confondent avec l'axe des z : ils sont, de plus, perpendiculaires entre eux; car le produit des deux valeurs de n multipliées l'une par l'autre est égal au dernier terme -1 de la seconde équation. *Donc il existe toujours trois axes rectangulaires d'élasticité pour chaque point matériel dans un système moléculaire quelconque, et quelles que soient les lois et la nature des actions que ces points matériels exercent les uns sur les autres.*

Si l'on suppose que, dans un milieu homogène, les faces correspondantes des particules ou les lignes homologues des groupes moléculaires sont toutes parallèles entre elles, les trois axes d'élasticité pour chaque point matériel auront la même direction dans toute l'étendue du milieu; c'est le cas le plus simple d'un arrangement régulier des molécules et celui que les substances cristallisées sembleraient devoir offrir constamment, d'après l'idée qu'on se fait d'une cristallisation régulière; néanmoins les aiguilles de cristal de roche présentent des phénomènes optiques qui démontrent que cette condition du parallélisme des lignes homologues n'y est pas rigoureusement remplie. On conçoit en effet qu'il peut y avoir sans elle beaucoup d'arrangements réguliers de différentes espèces : mais je n'ai encore cherché les lois mathématiques de la double réfraction qu'en supposant aux axes d'élasticité la même direction dans toute l'étendue du milieu vibrant, et je me bornerai en conséquence

à considérer ce cas particulier, le plus simple de tous et qui paraît être celui de la plupart des substances cristallisées; car on ne connaît encore, je crois, que le cristal de roche qui fasse exception à cette règle.

Application des théorèmes précédents au déplacement complexe des molécules vibrantes qui constitue les ondes lumineuses.

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que le déplacement d'un point matériel, en supposant toutes les autres molécules immobiles : nous aurions pu supposer, sans changer en rien le problème, que c'est le milieu qui se déplace, et le point matériel seul qui reste immobile. Mais les déplacements relatifs des molécules dans lesquels consistent les vibrations des ondes lumineuses sont plus compliqués. Considérons d'abord le cas le plus simple, celui d'une onde plane indéfinie : toutes les molécules, comprises dans le même plan parallèle à la surface de l'onde, sont restées dans les mêmes positions les unes à l'égard des autres ; mais elles se sont déplacées relativement au reste du milieu vibrant, ou, si l'on veut, c'est ce milieu qui s'est déplacé par rapport à elles, mais non pas de la même quantité pour les diverses tranches ou rangées moléculaires : la rangée voisine est la moins déplacée, et les molécules des tranches suivantes se trouvent d'autant plus écartées de leurs positions correspondantes à celles des molécules comprises dans le premier plan, qu'elles en sont plus éloignées. Si l'on considère toutes les molécules qui étaient primitivement situées sur la même ligne droite perpendiculaire à ce plan ou à la surface de l'onde, elles se

trouveront transportées, en raison du mouvement vibratoire, sur une courbe sinusoïdale, de part et d'autre de cette perpendiculaire, qui sera l'axe de la courbe; ses ordonnées parallèles à l'onde, c'est-à-dire les petits déplacements des molécules, seront proportionnelles aux sinus des abscisses correspondantes : telle sera du moins la nature de cette courbe toutes les fois que la particule éclairante qui a produit les ondes ayant été peu écartée de sa position d'équilibre, y sera ramenée par une force proportionnelle à l'écartement.

En se renfermant ainsi dans l'hypothèse des petits mouvements, on peut représenter la vitesse absolue dont une molécule éthérée est animée après un temps t, par la formule $u = a \sin. 2\pi \left(t - \frac{x}{\lambda}\right)$, dans laquelle u représente cette vitesse, a un coëfficient constant qui dépend de l'énergie des vibrations, 2π la circonférence dont le rayon est égal à l'unité, x la distance de la molécule au point lumineux, λ la longueur d'une ondulation et t le temps écoulé depuis l'origine du mouvement. Si l'on suppose que ces ondes planes et indéfinies soient réfléchies totalement sur un plan parallèle à leur surface, c'est-à-dire que sur ce plan les molécules éthérées soient assujetties à rester complètement immobiles, alors les ondes réfléchies auront la même intensité que les ondes incidentes, auxquelles elles seront d'ailleurs parallèles; en sorte qu'on devra employer le même coëfficient a dans l'expression des vitesses absolues qu'elles apporteront aux molécules éthérées. Appelons z la distance de l'onde directe au plan réfléchissant et c la distance constante de ce plan à la source du mouvement; l'espace parcouru par l'onde directe est $c - z$, et l'espace parcouru par l'onde réfléchie qui vient à sa ren-

contre est $c + z$. Ainsi les vitesses apportées en même temps et au même point de l'éther par les ondes directe et réfléchie, sont respectivement égales à $a \sin. 2\pi\left(t - \frac{c}{\lambda} + \frac{z}{\lambda}\right)$, et à $-a \sin. 2\pi\left(t - \frac{c}{\lambda} - \frac{z}{\lambda}\right)$. Cette seconde expression doit être affectée du signe —, puisque les molécules éthérées restant immobiles contre le plan réfléchissant, les vibrations lumineuses changent ainsi de signe par leur réflexion. Par conséquent la vitesse absolue résultant de la superposition de l'onde directe et de l'onde réfléchie, est à l'instant t,

$$a\left[\sin. 2\pi\left(t - \frac{c}{\lambda} + \frac{z}{\lambda}\right) - \sin. 2\pi\left(t - \frac{c}{\lambda} - \frac{z}{\lambda}\right)\right];$$

expression qu'on peut mettre sous la forme,

$$2a \sin. 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}\right) . \cos. 2\pi\left(t - \frac{c}{\lambda}\right) :$$

telle est l'expression générale de la vitesse absolue, qui anime, à l'instant t, une molécule éthérée située à la distance z du plan réfléchissant. Elle nous apprend d'abord qu'à certaines distances de ce plan, pour lesquelles $\sin. 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}\right) = 0$, les molécules éthérées restent constamment immobiles; or, $\sin. 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}\right)$ devient nul, lorsque z est égal à zéro ou à un nombre entier de fois $\frac{1}{2}\lambda$; ainsi les plans nodaux, c'est-à-dire les plans de repos, sont séparés entre eux et de la surface réfléchissante par des intervalles égaux à $\frac{1}{2}\lambda$. Les ventres, au contraire, c'est-à-dire, les points où les vibrations ont le plus d'amplitude sont dans des positions intermédiaires et à égale distance

des plans nodaux; en effet $\sin. 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}\right)$ atteint son maximum quand z est égal à un nombre impair de fois $\frac{1}{4}\lambda$.

La formule ci-dessus peut servir également à représenter les déplacements moléculaires, en changeant seulement t en $t-90^{o}$, ou, $\cos. 2\pi\left(t-\frac{c}{\lambda}\right)$ en $\sin. 2\pi\left(t-\frac{c}{\lambda}\right)$: elle devient alors

$$y = 2b.\sin. 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}\right).\sin. 2\pi\left(t-\frac{c}{\lambda}\right).$$

Si l'on prend y pour l'ordonnée qui répond à l'abscisse z, on voit que la courbe représentée par cette équation coupe toujours l'axe des z aux mêmes points, à tous les instants t, que ce sont les points pour lesquels $z=0, z=\frac{1}{2}\lambda; z=\lambda; z=\frac{3}{2}\lambda$, etc. Les plus grands écarts des molécules ou les plus grandes valeurs de y correspondent au contraire aux valeurs de z qui contiennent un nombre impair de fois $\frac{1}{4}\lambda$. Lorsque l'on considère maintenant les changements que la courbe éprouve d'un moment à l'autre, en raison des différentes valeurs du temps t, on voit que les ordonnées conservent toujours le même rapport entre elles, comme dans les oscillations d'une corde vibrante; et la formule précédente montre que les vitesses dont les molécules sont animées à chaque instant suivent aussi la même loi que celles des éléments d'une corde vibrante. On peut donc assimiler chaque partie du milieu comprise entre deux plans nodaux consécutifs; à un assemblage de cordes vibrantes perpendiculaires à ces plans et qui leur seraient attachées par leurs extrémités; la tension de ces cordes produirait le même effet que l'élasticité du milieu, puisque, comme celle-ci, elle tendrait sans cesse à redresser les lignes droites devenues courbes par les petits déplacements des molécules perpendiculaires à ces

lignes, et cela avec une force proportionnelle à l'angle de contingence. Ainsi, puisque la direction des mouvements oscillatoires, leur loi et celle des forces accélératrices sont les mêmes dans les deux cas, les règles qui s'appliquent à l'un s'appliquent nécessairement à l'autre. Or, on sait que pour qu'une corde vibrante exécute toujours ses oscillations dans le même temps, quand sa tension varie, il faut que sa longueur croisse proportionnellement à la racine carrée de sa tension; donc la longueur des mêmes ondes lumineuses, (qui doivent rester isochrones dans tous les milieux qu'elles traversent) est proportionnelle à la racine carrée de l'élasticité qui pousse les molécules du milieu vibrant parallèlement à leur surface; ainsi la vitesse de propagation de ces ondes *mesurée perpendiculairement à leur surface* est proportionnelle à la racine carrée de cette même élasticité.

Sans recourir aux lois connues des oscillations des cordes vibrantes, il est aisé de démontrer immédiatement, par des considérations géométriques, le principe que je viens d'énoncer.

Soit ABC (fig. 6) la courbe formée par une file de molécules du milieu vibrant, qui se trouvaient situées primitivement sur la ligne droite ADC : cette courbe peut être representée, comme nous venons de le voir, par l'équation,

$$y = 2b \sin. 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}\right) . \sin. 2\pi\left(t - \frac{c}{\lambda}\right),$$

qui devient $y = 2b \sin. 2\pi\left(\frac{z}{\lambda}\right)$, quand les molécules arrivent à la limite de leur oscillation : en ce moment leur vitesse est nulle, et l'on peut le considérer comme l'origine du mouvement pour l'oscillation suivante, qui doit résulter des for-

ces accélératrices tendant à ramener les molécules dans leurs positions relatives d'équilibre.

Soient m et m' deux points matériels très-voisins et également distants de la molécule M; représentons par dx la longueur constante de l'intervalle pP ou Pp' compris entre deux ordonnées consécutives. La différence entre les ordonnées MP et $m'p'$ est la quantité dont le point M se trouve éloigné de sa position primitive *relativement* aux molécules comprises dans le plan mené par m' perpendiculairement à l'axe AC de la courbe; ainsi la force accélératrice exercée sur M par cette tranche du milieu, en conséquence de ce déplacement, est proportionnelle à $m'p'$-MP. Si l'on considère les molécules comprises dans le plan passant par le point m et perpendiculaire à AC, leur action sur M résultant de leur déplacement relatif, sera aussi proportionnelle à l'étendue de ce déplacement MP-mp, mais agira en sens contraire de l'autre force accélératrice; en sorte que l'action définitive de ces deux tranches équidistantes sur la molécule M sera proportionnelle à la différence des deux déplacements relatifs, ou à d^2y, si la distance Mp ou Mp' est très-petite à l'égard de la longueur d'ondulation (1).

En différentiant deux fois de suite la valeur de y, on

(1) Dans la note sur la dispersion de la lumière placée à la suite de la première partie de ce Mémoire, j'ai examiné les conséquences mécaniques qui résultent de la supposition que l'action mutuelle des molécules les unes sur les autres s'étend à des distances sensibles relativement à la longueur d'ondulation : je me borne ici pour le moment au cas plus simple traité par les géomètres, qui ont toujours supposé que la sphère d'activité de la force élastique était infiniment petite par rapport à l'étendue de l'ébranlement.

trouve,

$$d^2y = -8b \cdot \frac{\pi^2}{\lambda^2} \cdot \sin.\left(2\pi\frac{z}{\lambda}\right) \cdot dz^2.$$

Ainsi, les forces accélératrices, et par conséquent les vitesses imprimées à chaque point de la courbe ABC, au moment où l'oscillation recommence, sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes; donc les petits espaces parcourus pendant le premier instant seront aussi dans le même rapport, et n'altéreront pas la nature de la courbe; ainsi, après le premier instant dt, les nouvelles forces accélératrices seront encore proportionnelles aux ordonnées correspondantes; et comme les vitesses acquises le sont aussi, les espaces parcourus pendant le second instant conserveront encore entre eux le même rapport : il en sera de même après le troisième instant, le quatrième, etc. Par conséquent tous les points de la courbe AMC arriveront ensemble sur la droite ADC, dont ils s'éloigneront ensuite de quantités égales à celles de leur écartement primitif, pour recommencer ensuite une oscillation en sens contraire. On voit que la loi de ces vibrations sera semblable à celle des petites oscillations d'un pendule, puisque la force accélératrice qui pousse chaque point matériel est toujours proportionnelle à l'espace qui lui reste à parcourir pour arriver à sa position d'équilibre. Ainsi, la durée des vibrations sera en raison inverse de la racice carrée de l'élasticité du milieu, élasticité qui est mesurée dans le cas dont nous nous occupons par l'énergie de la force résultant des déplacements relatifs des tranches parallèles du milieu, en les supposant égaux à une petite quantité constante prise pour unité.

Il est aisé de voir aussi que la durée des oscillations du

point M sera proportionnelle à la longueur λ de l'ondulation. En effet, pour comparer les durées d'oscillation correspondant à des valeurs différentes de λ, il faut toujours supposer dz constant, afin que les distances étant les mêmes, les actions moléculaires et les masses à mouvoir soient semblables de part et d'autre. En substituant dans la valeur de d^2y à la place de $\sin.\left(2\pi\frac{z}{\lambda}\right)$ sa valeur, on a,

$$d^2y = -4\frac{\pi^2}{\lambda^2}.y.dz^2.$$

Pour un même degré d'élasticité du milieu vibrant, d^2y mesure l'énergie de la force qui tend à ramener le point M en P, et y est l'espace que ce point doit parcourir : ainsi pour des écartements égaux du point M, la force accélératrice est proportionnelle à $\frac{1}{\lambda^2}$; donc la durée de son oscillation sera proportionnelle à λ. Par conséquent, la durée des vibrations des concamérations est proportionnelle à $\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}$, en représentant par ε l'élasticité du milieu. Or comme cette durée doit rester constante pour les mêmes ondes lumineuses, quelque milieu qu'elles traversent, il faut donc que la longueur d'ondulation λ, ou la vitesse de propagation soit proportionnelle à la racine carrée de l'élasticité mise en jeu. Il suffit donc de déterminer la loi suivant laquelle cette élasticite varie dans un même milieu pour connaître toutes les vitesses de propagation que la lumière peut y affecter.

La loi que j'ai trouvée pour le cas où les axes d'élasticité ont des directions parallèles dans toute l'étendue du milieu, est fondée sur les théorèmes de statique générale qui viennent d'être démontrés, et sur le principe suivant : *l'élasticité*

mise en jeu par les déplacements relatifs des molécules reste toujours la même dans le même milieu, tant que la direction de ces déplacements ne change pas, et quelle que soit d'ailleurs celle du plan de l'onde. Je vais essayer de donner la raison théorique de ce principe, dont j'ai d'ailleurs vérifié l'exactitude par des expériences très-précises.

L'élasticité mise en jeu par les vibrations lumineuses dépend seulement de leur direction et non de celle des ondes.

Considérons les molécules comprises dans un même plan parallèle à la surface de l'onde : elles conservent toujours les mêmes positions relatives, et la résultante de toutes leurs actions sur l'une d'entre elles ne tend à lui imprimer aucun mouvement. Il n'en est plus de même de l'action de la tranche suivante du milieu sur cette molécule, qui ne se trouvant plus par rapport à elle dans la position primitive d'équilibre, exerce sur elle une petite action parallèle au plan de l'onde. Continuons de subdiviser ainsi le milieu vibrant par des plans parallèles infiniment rapprochés et équidistants : à mesure qu'ils sont plus éloignés du premier, les molécules qu'ils contiennent se trouvent plus écartées de leur position primitive relativement au point matériel que nous considérons; mais cet effet est plus que balancé par l'affaiblissement des forces résultant de l'augmentation de distance, et il cesse de se faire sentir à une certaine distance, qui sans être probablement tout-à-fait négligeable vis-à-vis la longueur d'une ondulation, n'en doit comprendre qu'une très-petite partie. Quelle que soit la loi suivant laquelle les actions moléculaires varient avec les distances, il est naturel de supposer que

cette loi reste la même pour le même milieu dans toutes les directions : je ne veux pas dire par-là que les molécules, situées à la même distance du point matériel, exercent sur lui, dans tous les sens, des répulsions égales; mais seulement que ces répulsions, quoique inégales, varient de la même manière avec la distance. En admettant cette hypothèse, très-probable par sa simplicité, on peut en conclure, ce me semble, que l'élasticité mise en jeu par les petits déplacements des molécules ne change pas, tant que la direction et l'étendue de ces déplacements restent les mêmes à la même distance du plan de l'onde, quelle que soit d'ailleurs la direction de ce plan.

En effet, supposons que les déplacements moléculaires soient toujours parallèles à la même direction; et considérons deux plans différents menés suivant cette direction, lesquels représenteront successivement la surface de l'onde dans deux situations différentes. Subdivisons le milieu vibrant en tranches infiniment minces et équidistantes, d'abord parallèlement au premier plan et ensuite parallèlement au second : appelons δ la petite quantité dont la seconde tranche ou la seconde rangée de molécules se trouve déplacée relativement à celle qui est contenue dans le plan de départ: les molécules originairement situées sur des lignes droites perpendiculaires à ce plan, forment actuellement des lignes courbes par l'effet du mouvement ondulatoire; et les déplacements sont sensiblement proportionnels aux carrés des distances au plan de départ, dans les tranches assez voisines pour exercer une action appréciable. Ainsi, 4δ sera la quantité dont les molécules de la troisième rangée se seront déplacées relativement à celles du plan de départ, et de même

9δ, 16δ, etc., seront les déplacements relatifs des tranches suivantes. Nous supposons, bien entendu, des déplacements semblables de l'autre côté du plan.

Si tous ces déplacements, au lieu de croître avec la distance, étaient égaux à δ, l'élasticité mise en jeu serait la même que dans le cas où, le milieu restant immobile, les seules molécules comprises dans ce plan auraient glissé de la petite quantité δ. On remarquera de plus que s'il n'y avait qu'une de ces molécules qui se fût écartée de sa position d'équilibre, la direction du plan en question n'aurait aucune influence sur la force à laquelle elle se trouverait soumise.

Appelons F cette force; elle est la somme des actions exercées sur la molécule restée fixe par toutes les tranches du milieu : or, pour passer de ce cas à celui dont nous nous sommes occupés en premier lieu, il faudrait multiplier l'action de la première tranche par zéro, celle de la seconde par 1, celle de la troisième par 4, celle de la quatrième par 9, etc., puisque dans ce cas la première tranche n'a point changé de position, que la deuxième s'est déplacée de la quantité δ, la troisième de 4δ, au lieu de δ, la quatrième de 9δ, et ainsi de suite; on aurait d'ailleurs la même progression, quelle que fût la direction du plan de l'onde. Ainsi, l'on devra toujours multiplier les actions individuelles des tranches situées au même rang par les mêmes nombres, pour tenir compte de l'étendue de leurs déplacements; d'ailleurs, les coëfficients qui dépendent de la distance de chaque tranche à la molécule immobile, seront aussi les mêmes à égale distance, en supposant, comme nous l'avons fait, que les actions moléculaires décroîtraient dans tous les sens suivant la même

fonction des distances. Par conséquent, la série numérique totale par laquelle il faudrait multiplier F pour avoir la force élastique qui résulte du mouvement ondulatoire, restera constante pour les diverses directions des tranches parallèles, ou du plan de l'onde, et cette force ne dépendra que de la seule direction des déplacements moléculaires.

Application des principes précédents aux milieux dont les axes d'élasticité conservent la même direction dans toute leur étendue.

Si l'on admet ce principe, dont je viens de démontrer la probabilité théorique, et dont j'ai vérifié d'ailleurs l'exactitude par des expériences très-précises sur les vitesses de la lumière dans la topaze, il devient facile de comparer les élasticités mises en jeu par deux mouvements vibratoires qui ont des directions différentes et appartiennent à deux systèmes d'ondes lumineuses faisant entre eux un angle quelconque. Il suffit pour cela de comparer d'abord l'élasticité mise en jeu par le premier système avec l'élasticité mise en jeu par des vibrations toujours dirigées dans son plan, mais parallèles à l'intersection des plans des deux systèmes d'ondes; puis en changeant le plan des ondes sans changer la direction de ces nouveaux déplacements, on comparera dans le plan du second système d'ondes l'élasticité qu'ils développent avec celle qui est excitée par les vibrations de ce second système. En un mot, les variations d'inclinaison de la surface des ondes relativement aux axes du milieu vibrant n'apportant aucun changement dans la force élastique tant que la direction des déplacements moléculaires reste la même, le

problème se réduit toujours à comparer les élasticités mises en jeu par deux systèmes d'ondes dont les surfaces sont parallèles, et dont les vibrations font entre elles un angle quelconque.

Or, les élasticités excitées par deux systèmes d'ondes semblables qui coïncident quant à leurs surfaces, mais dont les vibrations s'exécutent suivant des directions différentes, sont évidemment entre elles comme les forces produites par les déplacements successifs d'une seule molécule suivant la première et la seconde direction. En effet, considérons la tranche située dans la position primitive d'équilibre, et par rapport à laquelle les tranches parallèles se sont déplacées : ce sont dans les deux cas les mêmes tranches du milieu qui se sont déplacées et de quantités égales, mais suivant deux directions différentes. Or, en considérant ces deux modes de déplacement, nous pouvons appliquer à l'influence que chaque molécule de la tranche immobile éprouve de la part d'une des autres tranches, les théorèmes que nous avons démontrés pour l'action d'un système moléculaire quelconque sur un point matériel qui a été un peu écarté de sa position primitive, puisque cela équivaut à laisser ce point fixe et à déplacer toutes les autres molécules du système de la même quantité. Ainsi, l'on peut calculer et comparer d'après ces théorèmes les actions qu'une tranche quelconque exerce sur la tranche fixe, et les actions des autres tranches seront dans le même rapport, puisque leurs déplacements sont supposés égaux dans les deux cas. Par conséquent les élasticités mises en jeu par les deux mouvements ondulatoires sont entre elles comme les élasticités qui seraient excitées par les deux déplacements successifs d'une seule molécule suivant des di-

rections pareilles, et l'on peut appliquer aux déplacements complexes résultant des ondes lumineuses les principes démontrés précédemment pour le cas où une molécule est écartée de sa position d'équilibre, pendant que toutes les autres restent fixes.

Cela posé, prenons les trois axes d'élasticité du milieu vibrant pour axes des coordonnées, et représentons par a^2, b^2, c^2 les élasticités que mettent en jeu les vibrations parallèles aux axes des x, des y, des z, de manière que les vitesses de propagation correspondantes, qui sont proportionnelles aux racines carrées des élasticités, se trouvent représentées par a, b, c : nous nous proposons de déterminer la force élastique résultant de vibrations de même nature, mais parallèles à une autre direction quelconque qui fait avec ces axes les angles X, Y, Z. Je prends pour unité l'amplitude de ces vibrations, ou le coëfficient constant des déplacements relatifs des tranches parallèles du milieu; car pour comparer les élasticités, il faut comparer les forces qui résultent de déplacements égaux : ce coëfficient étant égal à 1, ceux des composantes parallèles aux x, y, z, seront cos.X, cos.Y, cos.Z. L'on sait d'ailleurs que ces forces auront les mêmes directions, d'après la propriété caractéristique des axes d'élasticité. Ainsi, appelant f la résultante de ces trois forces, on aura :

$$f=\sqrt{a^4\cos.^2 X+b^4\cos.^2 Y+c^4\cos.^2 Z};$$

et les cosinus des angles que cette résultante fait avec les axes des x, des y, des z, seront égaux respectivement à

$$\frac{a^2\cos. X}{f},\qquad \frac{b^2\cos. Y}{f},\qquad \frac{c^2\cos. Z}{f}.$$

On voit qu'en général cette résultante n'a pas la même direction que les déplacements qui l'ont produite. Mais on peut toujours la décomposer en deux autres forces, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à la direction des déplacements. Lorsque la seconde force se trouvera en même temps normale au plan de l'onde, elle n'aura plus aucune influence sur la propagation des vibrations lumineuses, puisque, d'après notre hypothèse fondamentale, les vibrations lumineuses s'opèrent *uniquement* dans le sens de la surface des ondes. Or, nous aurons soin de ramener à ce cas tous les calculs relatifs aux vitesses de propagation; c'est pourquoi nous allons nous borner à déterminer la composante parallèle aux déplacements.

Les angles que cette direction fait avec les axes sont X, Y, Z; les cosinus des angles que les mêmes axes font avec la résultante, sont, $\frac{a^2 \cos.X}{f}$, $\frac{b^2 \cos.Y}{f}$, $\frac{c^2 \cos.Z}{f}$; par conséquent, le cosinus de l'angle que la résultante fait avec la direction du déplacement est égal à

$$\frac{a^2 \cos.^2 X + b^2 \cos.^2 Y + c^2 \cos.^2 Z}{f} :$$

Or, il faut multiplier ce cosinus par la force f pour avoir sa composante parallèle à cette direction; la composante que nous cherchons est donc égale à

$$a^2 \cos.^2 X + b^2 \cos.^2 Y + c^2 \cos.^2 Z.$$

Si nous appelons v^2 cette composante de la force élastique, afin que la vitesse de propagation correspondante soit repré-

sentée par v, nous aurons,

$$v^2 = a^2 \cos.^2 X + b^2 \cos.^2 Y + c^2 \cos.^2 Z.$$

Surface d'élasticité, qui représente la loi des élasticités et des vitesses de propagation.

Je supposerai que l'on construise d'après cette équation une surface dont chaque rayon vecteur faisant avec les axes des x, des y et des z, des angles égaux à X, Y et Z, ait pour longueur la valeur de v : on pourra l'appeler *surface d'élasticité*, puisque les carrés de ses rayons vecteurs donneront les composantes de la force élastique suivant la direction de chaque déplacement.

Si l'on conçoit un système d'ondes lumineuses (toujours supposées planes et indéfinies) qui se propagent dans le milieu dont la loi d'élasticité est représentée par cette surface, en menant par son centre un plan parallèle aux ondes, on devra considérer toute composante perpendiculaire à ce plan comme n'ayant aucune influence sur la vitesse de propagation des ondes lumineuses. La force élastique, excitée par des déplacements parallèles à l'un des rayons vecteurs de cette section diamétrale, peut toujours être décomposée en deux autres forces, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire au rayon vecteur : la première est représentée en grandeur par le carré de la longueur même de ce rayon vecteur; la seconde n'étant perpendiculaire au plan de la section diamétrale que pour deux positions particulières, peut se décomposer généralement en deux autres forces, l'une comprise dans ce plan et l'autre normale au plan : celle-ci, comme nous venons de le dire, n'exerce pas d'influence sur la pro-

pagation des ondes lumineuses; mais il n'en est pas ainsi de l'autre composante, qu'il faudrait combiner avec la première composante parallèle au rayon vecteur, pour avoir toute la force élastique excitée dans le plan des ondes.

On remarquera que pour ce cas général, la force élastique qui propage les ondes ne serait pas parallèle aux déplacements qui l'ont produite, d'où résulterait dans les vibrations qui passent d'une tranche à l'autre un changement graduel de leur direction et par conséquent de l'intensité de la force élastique qu'elles mettent en jeu, ce qui rendrait très-difficile le calcul de leur propagation et empêcherait d'y appliquer la loi ordinaire d'après laquelle la vitesse de propagation est proportionnelle à la racine carrée de l'élasticité mise en jeu, loi que nous n'avons démontrée applicable que pour le cas particulier où la direction des vibrations et l'élasticité restent constantes d'une tranche à l'autre.

Mais il existe toujours dans chaque plan deux directions rectangulaires telles que les forces élastiques excitées par des déplacements parallèles à chacune d'elles étant décomposées en deux autres forces, l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à cette direction, la seconde composante se trouve perpendiculaire au plan; en sorte que les vibrations sont uniquement propagées par une force élastique parallèle aux déplacements primitifs, qui conserve ainsi dans leur trajet la même direction et la même intensité. Or, quel que soit le sens des vibrations incidentes, on pourra toujours les décomposer suivant ces deux directions rectangulaires dans le plan diamétral parallèle aux ondes, et ramener ainsi le problème de leur marche au calcul des vitesses de propagation des vibrations parallèles à ces deux directions,

calcul facile à faire d'après le principe que les vitesses de propagation sont proportionnelles aux racines carrées des élasticités mises en jeu, qui devient alors rigoureusement applicable.

Les petits déplacements parallèles aux axes d'une section diamétrale quelconque de la surface d'élasticité, ne tendent point à écarter les molécules des tranches suivantes du plan normal mené par leur direction.

Je vais démontrer que le plus grand et le plus petit rayon vecteur, ou les deux axes de la section diamétrale, jouissent de la propriété que je viens d'énoncer; c'est-à-dire, que les déplacements suivant chacun de ces deux axes excitent des forces élastiques dont la composante perpendiculaire à leur direction se trouve en même temps perpendiculaire au plan de la section diamétrale.

En effet, soit $x = By + Cz$ l'équation du plan sécant passant par le centre de la surface d'élasticité : l'équation de condition, qui exprime que ce plan contient le rayon vecteur dont les inclinaisons sur les axes des x, des y et des z, sont respectivement X, Y et Z, est

$$\cos.X = B\cos.Y + C\cos.Z.$$

On a d'ailleurs entre les angles X, Y et Z la relation

$$\cos.^2X + \cos.^2Y + \cos.^2Z = 1,$$

et pour équation de la surface d'élasticité

$$v^2 = a^2\cos.^2X + b^2\cos.^2Y + c^2\cos.^2Z.$$

Le rayon vecteur v atteint son *maximum* ou son *minimum* quand sa différentielle devient nulle; on a donc dans ce cas, en différentiant l'équation de la surface par rapport à l'angle X,

$$o = a^2 \cos.X \sin.X + b^2 \cos.Y \sin.Y \frac{dY}{dX} + \cos.Z \sin.Z \frac{dZ}{dX}.$$

Si l'on différentie pareillement les deux équations précédentes, on aura encore,

$$\cos.X \sin.X + \cos.Y \sin.Y \frac{dY}{dX} + \cos.Z \sin.Z \frac{dZ}{dX} = o,$$

$$-\sin.X + B \sin.Y \frac{dY}{dX} + C \sin.Z \frac{dZ}{dX} = o;$$

d'où l'on tire pour $\frac{dY}{dX}$ et $\frac{dZ}{dX}$ les valeurs suivantes :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\sin.X(C\cos.X + \cos.Z)}{\sin.Y(B\cos.Z - C\cos.Y)}, \text{ et, } \frac{dZ}{dX} = \frac{-\sin.X(B\cos.X + \cos.Y)}{\sin.Z(B\cos.Z - C\cos.Y)}.$$

Substituant ces deux valeurs dans la première équation différentielle, qui exprime la condition commune du *maximum* ou du *minimum*, on trouve pour l'équation qui détermine la direction des axes de la section diamétrale :

$$a^2 \cos.X(B\cos.Z - C\cos.Y) + b^2 \cos.Y(C\cos.X + \cos.Z) - c^2 \cos.Z(B\cos.X + \cos.Y) = o \ldots\ldots (A)$$

Concevons maintenant un plan mené par le rayon vecteur et la force accélératrice que développent les déplacements parallèles au rayon vecteur; c'est dans ce plan que nous décomposerons cette force en deux autres, la première dirigée suivant le rayon vecteur, la deuxième perpendiculaire à sa direction; et si ce plan est perpendiculaire au plan sécant,

il est clair que la seconde composante sera normale à celui-ci. Nous allons donc chercher l'équation qui exprime que ces deux plans font entre eux un angle droit, et si elle s'accorde avec l'équation (A), nous pourrons en conclure que les axes de la section diamétrale sont précisément les deux directions qui satisfont à la condition que la composante perpendiculaire au rayon vecteur soit en même temps perpendiculaire au plan sécant.

Soit $x = B'y + C'z$ l'équation du plan mené suivant le rayon vecteur et la direction de la force élastique développée par des vibrations parallèles au rayon vecteur. Les cosinus des angles que cette force fait avec les trois axes des coordonnées sont,

$$\frac{a^2 \cos. X}{f}, \quad \frac{b^2 \cos. Y}{f}, \quad \frac{c^2 \cos. Z}{f};$$

et puisqu'elle est contenue dans le plan $x = B'y + C'z$, on a,

$$\frac{a^2 \cos. X}{f} = B' . \frac{b^2 \cos. Y}{f} + C' . \frac{c^2 \cos. Z}{f}, \text{ ou}$$
$$a^2 \cos. X = B' b^2 \cos. Y + C' c^2 \cos. Z.$$

Ce plan contenant le rayon vecteur, on a pareillement,

$$\cos. X = B' \cos. Y + C' \cos. Z.$$

On tire de ces deux équations,

$$B' = \frac{(a^2 - c^2) \cos. X}{(b^2 - c^2) \cos. Y}, \text{ et, } C' = -\frac{(a^2 - b^2) \cos. X}{(b^2 - c^2) \cos. Z} :$$

substituant ces valeurs de B′ et C′ dans l'équation

$$BB' + CC' + 1 = 0,$$

qui exprime que le second plan est perpendiculaire au premier, on trouve,

$$B(a^2-c^2)\cos.X\cos.Z-C(a^2-b^2)\cos.X\cos.Y+(b^2-c^2)\cos.Y\cos.Z=0,$$

relation semblable à celle de l'équation (1) qui détermine la direction des axes de la section diamétrale, comme il est aisé de le reconnaître en effectuant les multiplications. Donc les directions de ces deux axes jouissent effectivement de la propriété énoncée; d'où il résulte que les vibrations parallèles conservant toujours la même direction, ont une vitesse de propagation proportionnelle à la racine carrée de l'élasticité mise en jeu, vitesse qui peut alors être représentée par le rayon vecteur v.

Détermination de la vitesse de propagation des ondes planes et indéfinies.

A l'aide de ce principe et de l'équation de la surface d'élasticité, toutes les fois que l'on connaîtra les trois demi-axes a, b, c, il sera facile de déterminer la vitesse de propagation des ondes planes et indéfinies dont la direction sera donnée. Pour cela, on mènera d'abord par le centre de la surface d'élasticité un plan parallèle aux ondes, et l'on décomposera leur mouvement vibratoire en deux autres dirigés suivant le grand et le petit axe de cette section diamétrale : si l'on appelle α l'angle que les vibrations incidentes font avec le premier de ces axes, $\cos.\alpha$ et $\sin.\alpha$ représenteront les intensités relatives des deux composantes; et leurs vitesses de propagation mesurées perpendiculairement aux

ondes seront respectivement égales à la moitié du demi-axe de la section diamétrale auquel les vibrations sont parallèles. Ces deux demi-axes étant généralement inégaux, les deux systèmes d'ondes parcourront le milieu avec des vitesses différentes, et cesseront d'être parallèles en sortant du milieu réfringent, si la surface d'émergence est oblique à celle des ondes, de manière que la différence des vitesses entraîne une différence de réfraction. Quant aux plans de polarisation des deux faisceaux divergents, ils seront perpendiculaires entre eux, puisque leurs vibrations sont rectangulaires.

Il y a deux plans diamétraux qui coupent la surface d'élasticité suivant des cercles.

Il est à remarquer que la surface

$$v^2 = a^2 \cos.^2 X + b^2 \cos.^2 Y + c^2 \cos.^2 Z,$$

qui représente les lois de l'élasticité de tout milieu dont les groupes moléculaires ont leurs axes d'élasticité parallèles, peut être coupée suivant deux cercles par deux plans menés suivant son axe moyen et également inclinés sur chacun de deux autres axes.

En effet, remplaçons les coordonnées polaires par des coordonnées rectangulaires dans cette équation qui devient ainsi,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 :$$

la section circulaire faite dans cette surface peut toujours être considérée comme appartenant en même temps à la surface d'une sphère $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; sa circonférence devra

donc se trouver à la fois dans le plan sécant $Z = Ax + By$, sur la surface de la sphère et sur la surface d'élasticité. La combinaison des équations de ces deux surfaces donne

$$r^4 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 :$$

en substituant dans cette relation la valeur de z tirée de l'équation du plan sécant, on a,

$$x^2(a^2 + A^2c^2) + y^2(b^2 + B^2c^2) + 2ABc^2xy = r^4 \qquad (1).$$

En substituant cette valeur de z dans l'équation de la sphère, on trouve pour la projection de la même courbe sur le même plan des xy,

$$x^2(1 + A^2) + y^2(1 + B^2) + 2ABxy = r^2 \qquad (2).$$

Les deux équations (1) et (2) devant être identiques, on a :

$$\frac{1 + B^2}{1 + A^2} = \frac{b^2 + B^2c^2}{a^2 + A^2c^2}; \quad \frac{2AB}{1 + A^2} = \frac{2ABc^2}{a^2 + A^2c^2}; \quad \frac{r^2}{1 + A^2} = \frac{r^4}{a^2 + A^2c^2}.$$

La seconde condition ne peut être satisfaite que par $A = 0$, ou $B = 0$, puisque sans cela il faudrait faire $c^2 + A^2c^2 = a^2 + A^2c^2$, ou, $a^2 = c^2$, quantités constantes dont on ne peut pas disposer. Si l'on suppose $A = 0$, on tire de la première équation de condition, $B = \pm\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}}$, quantité imaginaire si c'est b qui est l'axe moyen, puisque alors les deux termes de la fraction placée sous le radical sont de signes contraires. Ainsi, en supposant $a > b$ et $b > c$, il faut faire $B = 0$, d'où l'on conclut pour A la valeur réelle..... $A = \pm\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$. $B = 0$ indique que le plan sécant doit passer par l'axe des y ou l'axe moyen de la surface d'élasticité;

les deux valeurs égales et de signes contraires qu'on trouve pour A, c'est-à-dire pour la tangente de l'angle que ce plan fait avec l'axe des x, montrent qu'il y a deux plans également inclinés sur le plan des xy, qui satisfont à la condition de couper la surface d'élasticité suivant un cercle, et qu'il n'y a que ces deux plans. Toute autre section diamétrale a donc deux axes inégaux; en sorte que les ondes qui lui sont parallèles peuvent parcourir le même milieu avec deux vitesses différentes, selon que leurs vibrations sont dirigées suivant l'un ou l'autre de ces axes.

La double réfraction devient nulle pour les ondes parallèles aux deux sections circulaires de la surface d'élasticité.

Au contraire, les ondes parallèles aux sections circulaires doivent toujours avoir la même vitesse de propagation, dans quelque direction que leurs vibrations s'exécutent, puisque les rayons vecteurs de chaque section sont tous égaux entre eux; et de plus, leurs vibrations ne peuvent éprouver de déviation en passant d'une tranche à l'autre, parce que la composante perpendiculaire à chacun de ces rayons vecteurs est en même temps perpendiculaire au plan de la section circulaire; car nous venons de démontrer par le calcul précédent que cette condition était remplie dès que la différentielle du rayon vecteur devenait égale à zéro : or, c'est ce qui a lieu pour tous les rayons vecteurs des sections circulaires, puisque leur longueur est constante. Par conséquent, si l'on coupe un cristal parallèlement à chacune des sections circulaires de la surface d'élasticité, et qu'on y introduise perpendiculairement à ces faces, des rayons polarisés suivant un

azimut quelconque, ils n'éprouveront dans le cristal ni double réfraction, ni déviation de leur plan de polarisation; ainsi ces deux directions jouiront des propriétés de ce qu'on appelle improprement les *axes du cristal*, et que je nommerai *axes optiques*, pour les distinguer des trois axes rectangulaires d'élasticité, qu'on doit considérer, à mon avis, comme les véritables axes du milieu doué de la double réfraction.

Il n'y a jamais plus de deux axes optiques dans les milieux réfringents dont les axes d'élasticité ont partout la même direction.

Une conséquence remarquable du calcul que nous venons de faire, c'est qu'un corps constitué comme nous le supposons, c'est-à-dire dont les particules sont disposées de manière que les axes d'élasticité pour chaque point du milieu vibrant soient parallèles dans toute son étendue, ne peut pas avoir plus de deux axes optiques. Ils se réduisent à un seul lorsque deux des demi-axes a, b, c de la surface d'élasticité sont égaux entre eux : lorsque a est égal à b, par exemple, $A=o$, les deux sections circulaires se confondent avec le plan des xy, et les deux axes optiques qui leur sont perpendiculaires, avec l'axe des z, ou l'axe c de la surface d'élasticité, qui devient alors une surface de révolution. C'est le cas des cristaux que l'on désigne sous le nom de *cristaux à un axe*, tels que le spath calcaire. Quand les trois axes d'élasticité sont égaux entre eux, l'équation de la surface d'élasticité devient celle d'une sphère; les forces ne varient plus avec la direction des déplacements moléculaires, et le

milieu vibrant ne jouit plus de la double réfraction : c'est ce qui paraît avoir lieu dans tous les corps cristallisés en cubes.

Jusqu'à présent nous n'avons calculé que la vitesse de propagation des ondes lumineuses mesurée perpendiculairement à leur plan tangent, sans chercher à déterminer la forme des ondes dans l'intérieur du cristal et l'inclinaison des rayons sur leur surface. Tant qu'il ne s'agit de calculer les effets de la double réfraction que pour des ondes incidentes sensiblement planes, c'est-à-dire qui émanent d'un point lumineux suffisamment éloigné, il suffit de déterminer les directions relatives du plan de l'onde en dedans et en dehors du cristal, puisqu'on trouve ainsi l'angle que l'onde émergente fait avec l'onde incidente, et par conséquent l'inclinaison mutuelle des deux lignes suivant lesquelles il faudrait diriger successivement le rayon visuel ou l'axe d'une lunette pour voir le point de mire, d'abord directement, et ensuite à travers le prisme de cristal : je dis le *prisme*, car si la plaque de cristal avait ses faces parallèles, l'onde émergente serait parallèle à l'onde incidente, dans le cas que nous considérons, où le point lumineux est supposé à l'infini, quelle que fût d'ailleurs l'énergie de la double réfraction et la loi des vitesses de propagation dans l'intérieur du cristal. Il ne peut donc y avoir de séparation angulaire sensible des images ordinaire et extraordinaire dans ce cas, qu'autant que la plaque cristallisée est prismatique ; et pour calculer les angles de déviation de faisceaux ordinaire et extraordinaire, qui par leur différence donnent l'angle de divergence des deux images, il suffit de déterminer la vitesse de propagation de chaque système d'ondes dans le cristal d'après la direction de son plan relativement aux axes.

Démonstration de la loi de la réfraction pour les ondes planes et indéfinies.

Soit, par exemple, IN (fig. 7) le plan de l'onde incidente, que je suppose, pour plus de simplicité, parallèle à la face d'entrée du prisme de cristal BAC, dont les axes sont d'ailleurs dirigés d'une manière quelconque; toutes les parties de cette onde arriveront simultanément sur le plan AB, et elle n'éprouvera aucune déviation de son plan en pénétrant et en parcourant le cristal. Il n'en sera pas de même quand elle sortira du prisme : pour déterminer la direction du plan de l'onde émergente, du point A comme centre, et d'un rayon AE égal au chemin parcouru par la lumière dans l'air pendant le temps que l'onde met à aller de B en C, je décris un arc de cercle, auquel je mène par C une tangente CE; cette tangente indiquera précisément le plan de l'onde émergente, comme il est facile de le démontrer (1). Si l'on considère chaque point ébranlé de la surface AC comme étant lui-même un centre d'ébranlement, on voit que toutes les petites ondes sphériques ainsi produites arriveront simultanément sur CE, qui sera leur plan tangent commun : or, je dis que ce plan sera la direction de l'onde totale résultant de la réunion de toutes ces petites ondes élémentaires, du moins à une distance de la surface très-grande relativement à la longueur d'une ondulation. En effet, soit H un point quelconque de ce plan pour lequel je cherche en position

(1) Je suppose le plan de la figure perpendiculaire aux deux faces du prisme.

et en intensité la résultante de tous ces systèmes d'ondes élémentaires. Le premier rayon arrivé en ce point est celui qui a suivi la direction GH perpendiculaire à CE, et les rayons gH et g'H partis des autres points g et g', situés à droite et à gauche de G, se trouveront en arrière dans leur marche d'un nombre entier ou fractionnaire d'ondulations, d'autant plus grand que ces points s'écarteront davantage du point G. Si maintenant on divise CA de telle sorte qu'il y ait toujours une différence d'une demi-ondulation entre les rayons émanés de deux points de division consécutifs, il est aisé de voir qu'en raison de l'éloignement de H, qui est très-grand relativement à une longueur d'ondulation, les petites parties dans lesquelles on aura divisé CA deviendront sensiblement égales entre elles pour les rayons qui font avec GH des angles un peu prononcés; on peut donc admettre que les rayons envoyés par deux parties consécutives se détruiront mutuellement dès qu'ils auront une obliquité prononcée sur GH, ou plus rigoureusement, que la lumière envoyée par une de ces parties sera détruite par la moitié de la lumière de celle qui la précède et la moitié de la lumière de celle qui la suit; car sa largeur ne diffère de la moyenne arithmétique de celles entre lesquelles elle est située, que d'une très-petite quantité du second ordre : de plus, les rayons envoyés par ces trois parties doivent avoir sensiblement la même intensité, quelle que soit la loi de leur variation d'intensité autour des centres d'ébranlement, puisque étant sensiblement parallèles entre eux (à cause de l'éloignement de H), ils sont dans les mêmes circonstances (1).

(1) On peut faire pour les intensités de ces rayons la même observation

D'ailleurs, il résulte de la nature du mouvement vibratoire primitif d'où proviennent tous ces centres d'ébranlement, et dont ils doivent nécessairement répéter les oscillations, que les ondes élémentaires qu'ils enverront en H, y apporteront alternativement des vitesses absolues négatives et positives, qui seront pareilles quant à la grandeur, et ne différeront que par le signe : il en sera de même des forces accélératrices résultant des déplacements relatifs des molécules, qui seront égales et de signes contraires pour les deux mouvements opposés de l'onde primitive : or cette égalité entre les quantités positives et négatives contenues dans chaque ondulation complète, suffit pour que deux systèmes qui diffèrent dans leur marche d'une demi-ondulation se détruisent mutuellement quand ils ont d'ailleurs la même intensité. Ainsi tous les rayons sensiblement inclinés sur GH se détruiront mutuellement, et il n'y aura que ceux qui lui sont presque parallèles qui concourront efficacement à la formation du système d'ondes résultant. On pourra donc les considérer dans le calcul comme ayant des intensités égales, et intégrer entre $+\infty$ et $-\infty$ suivant les deux dimensions, en employant les formules que j'ai données dans mon Mémoire sur la diffraction. Mais, sans recourir à ces formules, il est évident d'avance que si l'intensité de l'onde incidente AB est la même dans toutes ses parties, les éléments de l'intégration

---

que pour l'étendue des parties de AC qui les envoient, en remarquant que les rayons de deux parties consécutives différant seulement en intensité d'une quantité infiniment petite du premier ordre, l'intensité des rayons d'une partie intermédiaire ne diffère que d'un infiniment petit du deuxième ordre de la moyenne entre les intensités des rayons des deux parties contiguës.

seront les mêmes pour les différents points h', H, h, etc. de l'onde émergente, situés à une distance suffisante de la surface CA, quelle que soit d'ailleurs la forme de l'intégrale, et qu'en conséquence l'intensité et la position de l'onde résultante seront les mêmes dans chacun de ces points; elle sera donc parallèle à CE, lieu géométrique des premiers ébranlements; les formules d'intégration la placent à un quart d'ondulation en arrière de ce plan; mais cela ne change rien à sa direction, la seule chose qui détermine celle du rayon visuel ou de l'axe de la lunette avec laquelle on observe le point de mire (1). Ainsi les sinus des angles BAC et CAE de la surface réfringente avec les ondes incidente et réfractée, sont entre eux comme les longueurs CB et AE, c'est-à-dire comme les vitesses de propagation de la lumière dans les deux milieux contigus.

Nous voyons donc que pour calculer les effets prismatiques des milieux doués de la double réfraction, quand le point de mire est à l'infini et qu'en conséquence l'onde incidente est plane, il suffit de connaître la vitesse de propagation des ondes ordinaires et extraordinaires dans l'intérieur du cristal pour chaque direction du plan de l'onde, cette vitesse étant mesurée perpendiculairement à ce plan. Or c'est ce que donnent le plus grand et le plus petit rayon vecteur de la section diamétrale faite dans la surface d'élasticité par le plan de l'onde. Mais lorsque le point de mire est très-rapproché du

(1) J'ai cru utile de répéter ici d'une manière abrégée l'explication que j'ai donnée de la loi de Descartes pour la réfraction ordinaire, dans la dernière note de mon Mémoire sur la diffraction, afin d'épargner au lecteur la peine d'y avoir recours.

milieu réfringent et qu'on emploie un cristal dont la double réfraction est très-forte, tel que le spath calcaire, dans lequel la courbure des ondes diffère beaucoup de celle d'une sphère, il devient nécessaire de connaître la forme de ces ondes.

Principe qui détermine la direction des rayons réfractés, lorsque le point de mire n'est pas assez éloigné pour qu'on puisse faire abstraction de la courbure des ondes lumineuses.

Afin de me faire comprendre plus aisément, je prendrai un cas bien simple, celui où le point de mire est situé dans l'intérieur du cristal, ou bien contre sa surface inférieure. Soient M (fig. 8) le point lumineux, EC la surface supérieure de la plaque par laquelle sortent les rayons; soient MA, Ma, Ma', des rayons partis du point lumineux suivant une direction telle qu'ils viennent frapper l'ouverture $b\,b'$ de l'œil ou de l'objectif de la lunette; je suppose que la courbe b B b' représente le lieu géométrique des ébranlements de première arrivée partis de la surface réfringente EC; elle sera parallèle, comme nous l'avons vu, à l'onde résultant de tous les ébranlements élémentaires. Or c'est de la direction de l'élément de l'onde émergente qui vient tomber sur l'ouverture de la pupille que dépend la position de l'image du point lumineux sur la rétine et par conséquent la direction du rayon visuel, qui est perpendiculaire à l'élément de l'onde; c'est donc la direction de cet élément ou de sa normale qu'il s'agit de déterminer. Cette normale est le rayon AB de plus prompte arrivée sur le milieu B de l'élément, puisque cet élément est tangent à la sphère décrite du point A comme

centre. Il ne s'agit donc que de chercher entre tous les rayons brisés MaB, MAB, Ma'B celui qui apportera le premier ébranlement en B, et sa direction hors du cristal sera celle suivant laquelle on verra le point de mire.

Mais la section faite dans la surface d'élasticité ne fournit pas immédiatement les quantités nécessaires pour déterminer les intervalles de temps compris entre les arrivées de l'ébranlement parti de M aux points a, A, a'; car elle ne donne la vitesse de propagation qu'autant que l'on connaît la direction du plan sécant ou de l'élément de l'onde auquel il est parallèle, et il est à remarquer de plus que la vitesse de propagation a toujours été censée comptée dans cette construction sur la perpendiculaire au plan de l'onde, tandis qu'il faudrait ici l'avoir sur la direction du rayon; car, ainsi que nous venons de le dire, le problème se réduit à chercher le rayon de première arrivée. Il est donc nécessaire de calculer d'abord les vitesses de propagation de l'onde dont le centre est en M suivant les différents rayons Ma, MA, Ma', c'est-à-dire les longueurs de ces rayons comprises entre le centre M et la surface de l'onde au bout d'un temps déterminé, ou en d'autre termes l'équation de la surface de l'onde.

Théorème sur lequel repose le calcul de la surface des ondes.

Soit C (fig. 9) un centre d'ébranlement, ARBD la position de l'onde émanée de C, après l'unité de temps, que je prends assez grande pour que la distance de l'onde au point C contienne beaucoup d'ondulations, ou en d'autres termes, pour que la longueur d'ondulation soit négligeable à l'égard de cette distance. Cela posé, concevons une onde plane in-

définie ON passant par le même point C : je dis qu'au bout de l'unité de temps elle aura dû se transporter parallèlement à elle-même dans la position *on* tangente à la courbe ARBD. En effet, soit R le point de contact; cherchons la résultante de tous les systèmes d'ondes élémentaires émanés des différents points de ON qui arrivent en R; on voit que par les raisons exposées précédemment, il n'y aura que les rayons tels que *c*R, *c'* R peu inclinés sur CR qui concourront d'une manière efficace à la composition du mouvement oscillatoire en R. Soient *c* et *c'* deux centres d'ébranlement, d'où viennent ces rayons peu obliques sur CR; au bout de l'unité de temps, ils auront envoyé les deux ondes *arbd* et *a' r' b' d'* absolument pareilles à l'onde ARBD et tangentes au même plan *on* dans les points *r* et *r'*; ainsi elles arriveront en R un peu plus tard que l'onde émanée de C; CR est donc le chemin de première arrivée de l'ébranlement en R. Il est à remarquer d'abord que tout est symétrique de part et d'autre du *minimum* dans un petit intervalle tel que celui que nous considérons, et qu'ainsi les mouvements oscillatoires qui viennent par les rayons correspondants *c*R et *c'* R et sont légèrement obliques au plan *on*, formeront ensemble des mouvements composés exactement parallèles à ce plan, comme le mouvement oscillatoire qui vient de C; on pourrait en dire autant de deux autres points correspondants quelconques situés hors du plan de la figure; donc déja le mouvement oscillatoire aura la direction qu'il doit avoir dans l'onde *on*. Quant à la position de l'onde résultante, elle se trouve en arrière du point R d'un quart d'ondulation, en intégrant parallèlement et perpendiculairement au plan de la figure; mais dans un calcul où nous avons considéré la longueur

d'ondulation comme négligeable vis-à-vis la distance CR, nous pouvons dire que l'onde ON est effectivement arrivée en R au bout de l'unité de temps : en faisant un raisonnement semblable pour chacun des autres points de on, on prouverait de même que les ébranlements résultant de tous ceux qui partent de ON y arrivent aussi au bout de l'unité de temps, et en conséquence que l'onde entière se trouve en cet instant transportée en on. On démontrerait de même que toute autre onde plane PQ passant par le point C serait au bout de l'unité de temps dans la position parallèle pq tangente à la même surface courbe ARBD; donc cette surface doit être tangente à la fois à tous les plans occupés au bout de l'unité de temps par toutes les ondes planes indéfinies parties de C : or nous connaissons leurs vitesses relatives de propagation mesurées dans des directions perpendiculaires à leurs plans, et nous pourrons en conséquence déterminer leurs positions au bout de l'unité de temps et en conclure l'équation de la surface de l'onde émanée du point C. De cette manière, la question est réduite au calcul d'une surface enveloppe.

Calcul de la surface des ondes dans les milieux doués de la double réfraction.

En conséquence, l'équation d'un plan qui passe par le centre de la surface d'élasticité étant $z = mx + ny$, celle du plan parallèle auquel la surface de l'onde doit être tangente sera $z = mx + ny + C$, C étant déterminé de manière que la distance de ce plan à l'origine des coordonnées soit égale au plus grand ou au plus petit rayon vecteur de la surface

d'élasticité compris dans le plan diamétral $z = mx + ny$.

L'équation de la surface d'élasticité rapportée aux trois axes rectangulaires d'élasticité est,

$$v^2 = a^2 \cos.^2 X + b^2 \cos.^2 Y + c^2 \cos.^2 Z.$$

Soient $x = \alpha z$ et $y = \beta z$ les équations d'une droite qui passe par son centre, c'est-à-dire d'un rayon vecteur; on a, entre α, β et X, Y, Z, les relations suivantes :

$$\cos.^2 X = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+\beta^2}, \quad \cos.^2 Y = \frac{\beta^2}{1+\alpha^2+\beta^2}, \quad \cos.^2 Z = \frac{1}{1+\alpha^2+\beta^2};$$

substituant ces valeurs de $\cos.^2 X$, $\cos.^2 Y$, $\cos.^2 Z$ dans l'équation ci-dessus, elle devient,

$$v^2(1+\alpha^2+\beta^2) = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2.$$

C'est encore l'équation polaire de la surface d'élasticité, mais dans laquelle on a remplacé les cosinus des angles X, Y et Z que le rayon vecteur fait avec les axes, par les tangentes α et β des deux angles que ses projections sur les plans coordonnés xz et yz font avec l'axe des z.

Quand le rayon vecteur v atteint son *maximum* ou son *minimum*, $dv = 0$; ainsi, en différentiant la dernière équation polaire de la surface d'élasticité, on a pour équation de condition :

$$v^2\left(\alpha + \beta.\frac{d\beta}{d\alpha}\right) = a^2\alpha + b^2\beta.\frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Le rayon vecteur dont les équations sont $x = \alpha z$ et $y = \beta z$ devant être compris dans le plan sécant $z = mx + ny$, on doit avoir,

$$1 = m\alpha + n\beta;$$

équation qui donne par la différentiation,

$$0 = m\,d\alpha + n\,d\beta;$$

d'où l'on tire $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{-m}{n}$; substituant dans l'équation différentielle ci-dessus, on trouve :

$$v^2(\alpha n - \beta m) = a^2\alpha n - b^2\beta m.$$

Si l'on combine cette relation avec l'équation $1 = m\alpha + n\beta$, on en tire les valeurs suivantes pour α et β :

$$\alpha = \frac{(b^2 - v^2)m}{(a^2 - v^2)n^2 + (b^2 - v^2)m^2}, \quad \beta = \frac{(a^2 - v^2)n}{(a^2 - v^2)n + (b^2 - v^2)m^2}.$$

Nous remarquerons en passant que ces expressions étant du premier degré, α et β ne peuvent pas avoir plus de valeurs que v^2. Or, en les substituant à la place de α et β dans l'équation de la surface d'élasticité, on trouve,

$$(a^2 - v^2)(c^2 - v^2)n^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)m^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2) = 0 \ldots\ldots\ldots (A) :$$

Cette équation étant seulement du second degré par rapport à v^2, n'en peut donner que deux valeurs; ainsi, il n'y a que deux élasticités différentes et deux directions du rayon vecteur qui satisfont à la condition du *maximum* ou du *minimum*. Il est aisé de reconnaître, sans calculer les doubles valeurs de α et de β, que ces deux directions doivent toujours être rectangulaires; car il résulte du théorème général sur les trois axes rectangulaires d'élasticité, que si l'on considère seulement les déplacements qui s'exécutent dans un plan et les composantes comprises dans le même plan, en faisant abstraction des forces qui lui sont perpendiculaires, il contient toujours deux directions rectangulaires, pour lesquelles la résultante des composantes comprises dans ce plan agit suivant la ligne même du déplacement : or ces

directions sont précisément celles que nous venons de chercher, puisque, ainsi que nous l'avons démontré, tout petit déplacement parallèle au plus grand ou au plus petit rayon vecteur d'une section diamétrale quelconque excite dans le plan de cette section une force parallèle au même rayon vecteur, l'autre composante étant toujours perpendiculaire à ce plan.

Des milieux constitués comme on l'a supposé, ne peuvent pas offrir plus de deux images du même objet.

Ainsi les deux modes de vibration qui se propagent sans déviation de leurs oscillations ni changement de vitesse, s'exécutent suivant des directions rectangulaires, c'est-à-dire de la manière la plus indépendante; et comme il n'y a d'ailleurs que deux valeurs de v^2 ou de l'élasticité qu'elles mettent en jeu, il ne saurait y avoir que deux systèmes d'ondes parallèles au plan de l'onde incidente, quelle que soit la direction primitive du mouvement vibratoire, puisqu'il peut toujours être décomposé suivant ces deux directions. Si donc on taille en prisme un cristal constitué comme nous supposons le milieu vibrant, c'est-à-dire, de telle manière que les axes d'élasticité soient parallèles dans toute son étendue, on ne devra jamais apercevoir que deux images d'un point de mire très-éloigné. Il en est de même encore lorsque ce point est assez près du cristal pour qu'il faille tenir compte de la courbure de l'onde.

En effet, il résulte du principe du chemin de plus prompte arrivée et de la construction que Huygens en a déduite pour déterminer la direction du rayon réfracté, que le nombre

des images est égal à celui des points de contact des plans tangents qu'on peut mener du même côté par une droite aux surfaces des différentes ondes dans lesquelles la lumière se divise en traversant le cristal. Or, il est évident que par la même droite et du même côté de leur centre commun, on ne peut leur mener que deux plans tangents; car si l'on pouvait en mener trois, il serait également possible de mener trois plans tangents parallèles du même côté du centre des ondes, d'où résulterait trois distances différentes de ces plans tangents au centre, et par conséquent trois vitesses de propagation pour les ondes planes indéfinies parallèles à un même plan; et nous venons de démontrer qu'il ne saurait y en avoir plus de deux. Par la même raison, il ne peut pas y avoir plus de deux points de contact, car l'existence de trois points de contact rendrait possible celle de trois plans tangents parallèles.

Suite du calcul de la surface des ondes.

Mais en calculant l'équation de la surface des ondes, le degré de cette équation va nous montrer plus clairement encore qu'il est impossible de leur mener par une droite plus de deux plans tangents du même côté du centre.

L'équation d'un plan qui passe par le centre de la surface d'élasticité étant

$$z = mx + ny,$$

Celle qui détermine les deux valeurs du plus grand et du plus petit rayon vecteur compris dans cette section diamétrale est, comme nous venons de le voir,

$$(a^2 - v^2)(c^2 - v^2)n^2 + (b^2 - v^2)(c^2 - v^2)m^2 + (a^2 - v^2)(b^2 - v^2) = 0 \ldots\ldots \text{(A)}.$$

Nous avons déja posé pour équation d'un plan parallèle à la section,

$$z = mx + ny + C;$$

le carré de la distance de ce plan à l'origine des coordonnées est représenté par $\frac{C^2}{1+m^2+n^2}$; ainsi, pour exprimer que le plan parallèle à la section diamétrale en est distant d'une quantité égale au plus grand ou au plus petit rayon vecteur, il suffit d'écrire,

$$\frac{C^2}{1+m^2+n^2} = v^2, \text{ ou } C^2 = v^2(1+m^2+n^2).$$

Ainsi l'équation de ce plan, auquel l'onde lumineuse doit être tangente, devient

$$(z-mx-ny)^2 = v^2(1+m^2+n^2) \ldots\ldots (B):$$

l'équation (A) donne v^2 en fonction de m et de n.

Si l'on fait varier successivement m et n d'une quantité très-petite, on aura deux nouveaux plans tangents très-voisins du premier, et l'intersection commune de ces trois plans appartiendra à la surface de l'onde. Il faut donc d'abord différentier les équations (A) et (B) par rapport à m, en supposant n constant, ce qui donne :

$$(z-mx-ny)x + v^2 m + (1+m^2+n^2)\frac{v\,dv}{dm} = 0 \ldots\ldots\ldots (B');$$

$$\frac{v\,dv}{dm}[(1+n^2)(a^2-v^2)+(1+m^2)(b^2-v^2)+(m^2+n^2)(c^2-v^2)]$$
$$-(b^2-v^2)(c^2-v^2)m = 0 \ldots\ldots\ldots (A').$$

Différentiant ensuite par rapport à n, sans faire varier m, on trouve de même :

$$(z-mx-ny)y + v^2 n + (1+m^2+n^2)\frac{v\,dv}{dn} = 0 \ldots\ldots (B_1)$$

$$\frac{v\,dv}{dn}\left[(1+n^2)(a^2-v^2)+(1+m^2)(b^2-v^2)+(m^2+n^2)(c^2-v^2)\right]$$
$$-(a^2-v^2)(c^2-v^2)n=0\ldots\ldots(A_1).$$

Maintenant si l'on élimine $\frac{v\,dv}{dm}$ entre les deux équations (A') et (B'), et $\frac{v\,dv}{dn}$ entre les équations (A_1) et (B_1), on aura deux nouvelles équations qui ne renfermeront plus que les trois quantités variables v, m et n, en sus des coordonnées rectangulaires x, y, z; et en les réunissant aux équations (A) et (B), on aura quatre équations entre lesquelles on pourra éliminer v, m et n. La relation obtenue par cette élimination entre les coordonnées x, y, z, sera l'équation générale des ondes, et appartiendra à la fois à la surface de l'onde ordinaire et à celle de l'onde extraordinaire.

Autre manière de calculer la surface des ondes.

Cette marche directe semble devoir entraîner dans des calculs d'une longueur rebutante, à cause du nombre des quantités qu'il s'agit d'éliminer et du degré des équations. On peut, à la vérité, éliminer v^2 entre les équations (A) et (B), avant de les différentier, ce qui donne une équation du quatrième degré en m et n. On arrive à une équation plus simple et du troisième degré seulement en suivant une autre marche. On obtient aisément une équation du premier degré en v^2, en faisant varier le plan sécant et par suite le plan tangent qui lui est parallèle, de manière que dv soit nul; alors l'intersection commune des deux positions successives du plan tangent est la tangente qui passe par le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le

plan tangent; et cette tangente passant par le point de contact peut servir à déterminer sa position aussi bien que le plan tangent et par la même méthode de différentiation et d'élimination.

Si l'on différentie l'équation (A), en considérant v comme constant, on trouve,

$$\frac{dn}{dm} = -\frac{m(b^2-v^2)}{n(a^2-v^2)} :$$

en différentiant de la même manière l'équation (B) du plan tangent, on a,

$$\frac{dn}{dm} = -\frac{v^2 m + x(z-mx-ny)}{v^2 n + y(z-mx-ny)} :$$

Ces deux valeurs égalées donnent la relation,

$$[v^2 n + y(z-mx-ny)](b^2-v^2)m = [v^2 m + x(z-mx-ny)](a^2-v^2)n,$$

dans laquelle les deux termes contenant v^4 se détruisent, et qui devient :

$$mn(a^2-b^2)v^2 + (z-mx-ny)(my-nx)v^2 + (z-mx-ny)(nax^2-mby^2) = 0;$$

ou mettant à la place de v^2 sa valeur $\frac{(z-mz-ny)^2}{1+m^2+n^2}$ et supprimant le facteur commun $z-mx-ny$,

$$(z-mx-ny)^2(my-nx) + mn(a^2-b^2)(z-mx-ny) + (na^2x-mb^2y)(1+m^2+n^2) = 0 \ldots\ldots (C).$$

Maintenant pour avoir la surface de l'onde, il suffit de différentier cette équation successivement par rapport à m et

à n, et d'en éliminer ensuite m et n, à l'aide de ces deux nouvelles équations.

Ayant trouvé l'équation de la surface de l'onde par un calcul beaucoup plus court, il me suffisait de vérifier si elle satisfaisait à l'équation (C), dans laquelle m et n représentent le $\frac{dz}{dx}$ et le $\frac{dz}{dy}$ de la surface cherchée. J'ai suivi cette marche synthétique, parce qu'elle me semblait devoir être plus simple que l'élimination, et cependant les calculs dans lesquels elle m'a entraîné sont tellement longs et fastidieux que je ne crois pas devoir les transcrire ici. Je me contenterai de dire que la condition exprimée par l'équation (C) est satisfaite par l'équation suivante,

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-a^2(b^2+c^2)x^2-$$
$$b^2(a^2+c^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0\ldots\ldots\text{(D)}.$$

J'étais parvenu à cette équation en déterminant d'abord l'intersection de la surface de l'onde avec chacun des plans coordonnés, intersection qui présente la réunion d'un cercle et d'une ellipse : j'avais remarqué ensuite qu'on obtenait une surface qui offrait le même caractère, lorsque l'on coupait l'ellipsoïde par une suite de plans diamétraux et qu'on menait par son centre, perpendiculairement à chaque plan, des rayons vecteurs égaux à la moitié de chacun des axes de la section diamétrale; car la surface qui passe par les extrémités de tous ces rayons vecteurs ainsi déterminés, donne aussi la réunion d'un cercle et d'une ellipse dans son intersection avec les trois plans coordonnés ; elle est d'ailleurs du quatrième degré seulement, et l'identité des sections faites par les trois plans diamétraux conjugués rectangulaires dans ces deux surfaces, m'aurait suffi pour établir leur

identité, si j'avais pu démontrer que l'équation de l'onde ne pouvait point passer le quatrième degré, ce qui paraissait résulter des conditions mêmes de sa génération; puisqu'il n'y a que deux valeurs pour le carré v^2 de la distance de l'origine au plan tangent, en sorte que la surface ne peut avoir que deux nappes réelles; mais comme il n'était pas impossible que l'équation cherchée contînt en outre des nappes imaginaires, il fallait s'assurer directement, comme je l'ai fait, que l'équation du quatrième degré à laquelle l'ellipsoïde m'avait conduit satisfaisait à l'équation (C), qui exprime la génération de la surface de l'onde.

Calcul très-simple qui conduit de l'équation d'un ellipsoïde à celle de la surface des ondes.

Le calcul par lequel je suis arrivé à l'équation (D) est si simple, que je crois pouvoir le placer ici.

Je prends un ellipsoïde qui a les mêmes axes que la surface de l'élasticité; son équation est,

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

soit $z = px + qy$, l'équation du plan sécant; les carrés des deux axes de la section sont donnés par la relation suivante,

$$a^2(b^2-r^2)(c^2-r^2)p^2 + b^2(a^2-r^2)(c^2-r^2)q^2 + c^2(a^2-r^2)(b^2-r^2) = 0,$$

dans laquelle r représente le plus grand et le plus petit rayon vecteur de cette section elliptique.

Les équations d'une droite menée par le centre de l'ellip-

soïde perpendiculairement au plan sécant sont,

$$x = -pz, \text{ et } y = -qz;$$

d'où l'on tire,

$$p = \frac{-x}{z}, \text{ et } q = \frac{-y}{z} :$$

substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, on a;

$$a^2x^2(b^2-r^2)(c^2-r^2) + b^2y^2(a^2-r^2)(c^2-r^2) + c^2z^2(a^2-r^2)(b^2-r^2) = 0;$$

ou, en effectuant les multiplications,

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)r^4 - [a^2(b^2+c^2)x^2 + b^2(a^2+c^2)y^2 + c^2(a^2+b^2)z^2]r^2 + a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2) = 0.$$

Enfin, observant que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, et supprimant le facteur commun $x^2 + y^2 + z^2$, on arrive à l'équation (D),

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2) - a^2(b^2+c^2)x^2 - b^2(a^2+c^2)y^2 - c^2(a^2+b^2)z^2 + a^2b^2c^2 = 0.$$

Si l'on veut rapporter la surface de l'onde à des coordonnées polaires, il faut mettre r^2 à la place de $x^2 + y^2 + r^2$ et substituer à x^2, y^2, z^2, leurs valeurs $r^2\cos^2.\,X$, $r^2\cos^2.\,Y$, $r^2\cos^2.\,Z$, ce qui donne l'équation suivante,

$$(a^2\cos.^2X + b^2\cos.^2Y + c^2\cos.^2Z)r^4 - [a^2(b^2+c^2)\cos.^2X + b^2(a^2+c^2)\cos.^2Y + c^2(a^2+b^2)\cos.^2Z]r^2 + a^2b^2c^2 = 0,$$

à l'aide de laquelle on peut calculer la longueur du rayon vecteur de l'onde, c'est-à-dire, sa vitesse de propagation comptée suivant la direction même du rayon lumineux,

quand on connaît les angles que celui-ci fait avec les axes d'élasticité du cristal.

Il est aisé de s'assurer que les intersections de la surface représentée par l'équation (D), avec les plans coordonnés, se composent d'un cercle et d'une ellipse; en effet, si l'on y suppose $z = o$, par exemple, on trouve,

$$(a^2x^2+b^2y^2)(x^2+y^2)-a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(a^2+c^2)y^2+a^2b^2c^2=0,$$

ou,

$$(a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2)(x^2+y^2-c^2)=0,$$

équation qui se compose de l'équation d'un cercle dont le rayon est c, et de celle d'une ellipse dont les demi-axes sont a et b.

L'équation de la surface des ondes ne se décompose en deux facteurs rationnels du second degré, que lorsque deux des axes d'élasticité sont égaux.

Mais l'équation générale de la surface de l'onde n'est pas, comme celles de ces intersections, toujours décomposable en deux facteurs rationnels du second degré, ainsi que je m'en suis assuré par la méthode des coëfficients indéterminés : on ne peut effectuer cette décomposition que lorsque deux des axes sont égaux. Supposons, par exemple, que $b = c$, l'équation (D) devient alors :

$$[a^2x^2+b^2(y^2+z^2)](x^2+y^2+z^2)-2a^2b^2x^2-b^2(a^2+b^2)(y^2+z^2)+a^2b^4=0,$$

ou,

$$(x^2+y^2+z^2)[a^2x^2+b^2(y^2+z^2)-a^2b^2]-b^2[a^2x^2+b^2(y^2+z^2)+a^2b^2]=0,$$

ou enfin,

$$(x^2+y^2+z^2-b^2)[a^2x^2+b^2(y^2+z^2)-a^2b^2]=0;$$

équation qui est le produit de celle d'une sphère par celle d'un ellipsoïde de révolution.

La Construction d'Huygens, qui détermine le chemin de plus prompte arrivée, ou la direction du rayon réfracté, s'applique aux cristaux à deux axes, comme au spath calcaire, et en général à toutes les ondes de forme quelconque.

C'est à ces deux surfaces qu'on mène successivement un plan tangent, dans la construction que Huygens a donnée pour le spath d'Islande. Dans le cas général des cristaux à deux axes, c'est-à-dire lorsque les trois axes d'élasticité sont inégaux, il faut mener un plan tangent à chacune des deux nappes de la surface représentée par l'équation (D), et en joignant les points de contact avec le centre de la surface, on aura les directions des deux chemins de prompte arrivée et par conséquent du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire. J'emploie ici l'expression reçue de *rayon ordinaire*, quoiqu'en réalité dans ce cas général aucun des deux faisceaux ne suive les lois de la réfraction *ordinaire*, ainsi qu'il résulte de l'équation.

La position de la droite par laquelle on doit mener le plan tangent se détermine ici, comme dans la construction d'Huygens, c'est-à-dire qu'il faut prendre sur une direction R'T (fig. 10) parallèle aux rayons incidents une quantité BT égale à l'espace parcouru par la lumière en dehors du cristal pendant l'unité de temps; puis par le point B mener

perpendiculairement à ces rayons le plan AB, qui représentera un élément de l'onde incidente au commencement de l'unité de temps, en supposant AB très-petit relativement à la distance du point lumineux. Maintenant, si par le point T on mène une droite parallèle à l'intersection de ce plan avec la face du cristal, cette ligne projetée en T (1) sera l'intersection de la surface avec l'élément AB de l'onde au bout de l'unité de temps; c'est donc par cette droite qu'il faut mener un plan tangent aux ondes formées dans le cristal au bout du même intervalle de temps, et dont les centres sont situés sur la première intersection A : les points de contact M et N avec les deux nappes de la surface de ces ondes détermineront les deux directions AN et AM des deux rayons réfractés, qui en général ne coïncideront pas avec le plan de la figure. La même construction serait applicable à des ondes d'une forme quelconque, et le principe général du chemin de plus prompte arrivée ramène tous les problèmes sur la détermination des rayons réfractés au calcul de la surface que l'onde affecte dans le milieu réfringent.

Détermination des axes d'élasticité et des trois constantes a, b, *et* c, *de l'équation de l'onde.*

Pour le cas qui fait l'objet de ce Mémoire, la surface de l'onde est représentée par l'équation (D) : les directions de ses axes sont données par l'observation, et doivent offrir probablement dans chaque cristal une relation très-simple avec

(1) Le plan de la figure est supposé perpendiculaire à l'intersection du plan AB avec la surface AT du cristal.

ses lignes de cristallisation et ses faces de clivage (1); deux de ces axes divisent en deux parties égales l'angle aigu et l'angle obtus compris entre les deux axes optiques, dont la direction peut être déterminée immédiatement par l'observation, et le troisième axe d'élasticité est perpendiculaire au plan des deux axes optiques. On peut encore trouver les directions des axes d'élasticité en observant celles des plans de polarisation de la lumière émergente, à l'aide de la règle très-simple relative à ces plans que M. Biot a déduite de ses expériences, et qui se trouve être une conséquence de notre théorie, comme nous allons le montrer bientôt (2). Quant aux constantes a, b, c, ou les trois demi-axes de la surface d'élasticité, ils représentent par hypothèse les vitesses de propagation des vibrations parallèles aux axes des x, des y et des z, c'est-à-dire les espaces qu'elles parcourent pendant l'unité de temps. On peut déterminer ces vitesses

(1) Il semblerait que les axes d'élasticité devraient toujours affecter des directions symétriques relativement aux faces correspondantes du cristal, c'est-à-dire qu'ils devraient être des axes de symétrie pour la forme, comme ils le sont pour l'élasticité : cependant M. Mitscherlich a remarqué plusieurs cristaux dans lesquels la ligne qui divise en deux parties égales l'angle des deux axes optiques, ne se trouve pas dirigée symétriquement par rapport aux faces correspondantes de cristallisation.

(2) En disant que la construction simple et élégante donnée par M. Biot pour déterminer les plans de polarisation est une conséquence de notre théorie, je ne veux pas faire entendre que j'aie quelque droit à partager l'honneur de cette découverte, puisque les travaux de M. Biot sur la double réfraction sont bien antérieurs aux miens ; je veux dire seulement que la loi qu'il avait trouvée découle nécessairement de la théorie que je viens d'exposer, et qu'il s'agit ici d'une confirmation frappante et non pas simplement d'un fait qu'on ferait coïncider avec le calcul à l'aide d'une constante arbitraire ou par l'addition d'une hypothèse subsidiaire.

de bien des manières : la plus directe est de mesurer successivement les vitesses des rayons réfractés parallèles à chacun des axes d'élasticité, et dont les vibrations sont parallèles à l'un des deux autres axes; l'on emploiera à cet effet les observations ordinaires de réfraction, ou le procédé plus délicat que fournit le principe des interférences, et qui permet d'évaluer les plus petites différences de vitesse. En parcourant le cristal parallèlement à l'axe des x, la lumière affecte deux vitesses, qui mesurées donnent b et c; parallèlement aux y ces deux vitesses sont a et c; et parallèlement aux z elles sont a et b. Ainsi deux de ces mesures faites avec soin suffisent à la rigueur pour déterminer les trois quantités a, b, c.

On peut déduire de la construction d'Huygens appliquée à l'équation (D), des formules générales qui donnent la direction des rayons réfractés pour toutes les directions des rayons incidents et de la surface du cristal relativement à ces axes, comme Malus l'a fait pour le spath d'Islande, où l'onde extraordinaire est un ellipsoïde de révolution. Je n'ai point calculé ces formules, dont je n'avais pas besoin pour vérifier ma théorie sur la topaze. En général, tant qu'il s'agit de cristaux dont la double réfraction est faible, et quand on se borne à chercher la divergence des deux faisceaux obtenus en taillant le cristal en prisme, il suffit de déterminer d'abord approximativement la direction du rayon lumineux dans l'intérieur du cristal, d'après la loi de Descartes, avec l'index de réfraction des rayons ordinaires ou extraordinaires; et lorsque l'on connaît ainsi la direction approchée du rayon réfracté, on peut calculer les deux vitesses correspondantes au moyen de l'équation (D), ou les deux vitesses

de l'onde mesurées perpendiculairement à son plan au moyen de l'équation (C), qui représente la section faite dans la surface d'élasticité par un plan diamétral parallèle à l'onde, et dans laquelle m et n sont donnés dès que l'on connaît la direction de l'onde réfractée. Ces deux vitesses une fois connues, il devient facile d'en conclure la direction et la divergence des deux faisceaux ou des deux systèmes d'ondes émergents. Si l'on voulait d'ailleurs pousser plus loin l'exactitude, il faudrait déterminer avec la vitesse ainsi calculée une nouvelle direction plus approchée du rayon ou du plan de l'onde dans le cristal, et calculer de nouveau la vitesse correspondante, à l'aide de l'équation (D) ou de l'équation (C), selon qu'on voudrait obtenir la vitesse mesurée sur le rayon ou la normale au plan de l'onde; puis on en conclurait la direction de chacun des deux faisceaux émergents. Cette méthode est tout aussi exacte et bien moins pénible que l'emploi des formules dont nous venons de parler, qui seraient sans doute très-compliquées. Elle peut même s'appliquer aux cristaux dont la double réfraction est la plus énergique, en répétant l'opération un nombre de fois suffisant.

Quand il s'agit de vérifier la loi des vitesses par une expérience de diffraction, il suffit de considérer la vitesse de propagation de l'onde réfractée mesurée perpendiculairement à son plan; c'est même la méthode la plus simple, parce que l'expérience donne immédiatement la différence entre les nombres des ondulations exécutées dans l'épaisseur des plaques, dont il est aisé de conclure immédiatement la différence de marche des deux systèmes d'ondes, puisque ces nombres sont égaux à l'épaisseur de la plaque divisée

par les deux longueurs d'ondulation ou les deux vitesses mesurées perpendiculairement au plan des ondes, quelle que soit d'ailleurs l'obliquité des rayons sur la surface des ondes. Supposons, par exemple, qu'une plaque de cristal à faces parallèles ABFD (fig. 11) est traversée perpendiculairement par un faisceau lumineux venant d'un point assez éloigné pour qu'on puisse considérer comme plane la petite étendue de l'onde incidente AB qui subit la réfraction: l'onde réfractée sera, dans toutes ses positions successives, plane et parallèle à AB; par conséquent il suffira de connaître la vitesse de propagation de cette onde mesurée suivant CD perpendiculairement à AB, pour savoir quel temps relatif elle a employé à parcourir l'épaisseur de la plaque, ou quel nombre d'ondulations elle y a exécutées. Il est inutile de calculer la direction oblique ED par laquelle les *rayons réfractés* sont arrivés en D vis-à-vis la fente T pratiquée dans l'écran; mais si l'on suivait cette marche, au lieu d'employer la vitesse déduite de l'équation que nous venons de rappeler, et dans laquelle elle est supposée comptée sur la normale à l'onde, il faudrait se servir de la vitesse donnée par l'équation (D) où elle est comptée sur la direction du rayon ED, et l'on arriverait évidemment au même résultat.

Définition du mot rayon.

Le mot *rayon* dans la théorie des ondes, doit toujours être appliqué à la ligne qui va du centre de l'onde à un point de sa surface, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison de cette ligne sur l'élément auquel elle aboutit, ainsi que l'a remarqué Huygens; car cette ligne offre en effet toutes

les propriétés optiques de ce qu'on appelle *rayon* dans le système de l'émission. Ainsi, quand on veut traduire les résultats de la première théorie dans le langage de la seconde, il faut toujours supposer que la ligne parcourue par les molécules lumineuses, dans l'hypothèse de l'émission, a la même direction que le rayon mené du centre de l'onde au point de sa surface que l'on considère. Ce que nous avons dit précédemment pour établir ce principe aura peut-être paru suffisant : nous croyons utile cependant de l'appuyer encore sur une nouvelle considération tirée d'une autre manière de juger par expérience de la direction du rayon réfracté.

Nouvelle considération qui montre encore que le rayon vecteur de la surface de l'onde est bien la direction du rayon lumineux.

Supposons, comme tout-à-l'heure, que l'onde incidente soit plane et parallèle à la surface d'entrée du cristal, mais que l'écran percé d'un petit trou, soit placé sur la première face au lieu d'être sur la seconde, et qu'on veuille juger de la direction du rayon réfracté par le point D (fig. 12) où la lumière ainsi introduite va frapper la seconde face : le point que l'on regardera comme répondant à l'axe du faisceau lumineux sera le centre D des petits anneaux brillants et obscurs projetés sur la face FD, et c'est en ce point central que se trouvera le maximum de lumière, si le trou m n est assez petit relativement à la distance ED. La position du centre D est déterminée par la condition que les rayons partis des divers points m et n de la circonférence de l'ouverture arrivent en même temps en D ; ce point doit être

l'endroit le plus vivement éclairé, tant que le diamètre de l'ouverture est assez petit par rapport à la distance ED pour que la différence de marche entre les rayons partis du centre et de la circonférence n'excède pas une demi-ondulation. Or, pour comparer la marche des ébranlements élémentaires qui émanent des diverses parties de la surface de l'onde comprise dans l'étendue de la petite ouverture, il faut concevoir les ondes qu'ils produiraient séparément dans le même intervalle de temps, et en conclure la différence entre leurs instants d'arrivée en D. Soit rDs l'onde élémentaire ayant pour centre le milieu E de l'ouverture; si on lui mène un plan tangent FD parallèle à l'onde incidente AB, le point de contact D satisfera à la condition que nous venons d'énoncer; car l'onde élémentaire partie de E sera celle qui y arrivera la première; et, en raison de la propriété générale des *minimum* ou *maximum*, toutes les différences seront égales et symétriques à une petite distance autour du plus court chemin ED, c'est-à-dire que les ondes élémentaires parties des points m et n également distants de E, se trouveront en arrière de la même quantité en D relativement à l'onde partie de E, et arriveront ainsi en D en même temps; c'est d'ailleurs auprès du *minimum* ou du *maximum* d'une fonction que ses variations sont les plus insensibles; ce sera donc pour le point D qu'il y aura les plus petites différences possibles entre les chemins parcourus au même instant par les ondes élémentaires parties de l'ouverture m n, et qu'il y aura conséquemment le plus d'accord entre leurs vibrations, si, comme nous l'avons supposé, les plus grandes différences n'excèdent pas une demi-ondulation; c'est donc en D que se trouvera le *maximum* de lumière, et par con-

séquent ED sera sous ce rapport, comme sous tous les autres, la direction du *rayon lumineux dans le cristal.* Maintenant, si l'on supprime l'écran, on devra dire encore que les *rayons réfractés* qui partent des différents points de l'onde incidente, considérée alors comme indéfinie, sont parallèles à ED, c'est-à-dire au rayon vecteur dirigé vers le point de la surface d'une onde intérieure pour lequel le plan tangent est parallèle à l'onde réfractée.

Le sens qu'il faut attacher au mot *rayon lumineux* étant ainsi bien établi, on voit que l'ellipsoïde construit sur les mêmes axes rectangulaires que la surface d'élasticité donne *rigoureusement,* par les deux demi-axes de sa section diamétrale, les vitesses des *rayons réfractés perpendiculaires à cette section,* comme la construction analogue faite dans la surface d'élasticité donne les vitesses de propagation des ondes parallèles à la section diamétrale, ces vitesses étant comptées perpendiculairement au plan des ondes. Ainsi comprise, la première construction est une conséquence mathématique de la seconde, et représente les phénomènes d'une manière aussi rigoureuse, quelle que soit d'ailleurs l'énergie de la double réfraction ou l'inégalité des trois axes a, b, c.

En traduisant dans le langage du système de l'émission la loi d'Huygens pour la double réfraction du spath d'Islande, M. de Laplace a trouvé par une élégante application du principe de la moindre action, que la différence entre les carrés des vitesses des deux faisceaux ordinaire et extraordinaire était proportionnelle au carré du sinus de l'angle que le rayon extraordinaire fait avec l'axe du cristal. Guidé par l'analogie, M. Biot a pensé que dans les cristaux à deux axes

la même différence devait être proportionnelle au produit des sinus des angles que le rayon extraordinaire fait avec chacun des axes optiques, produit qui redevient égal au carré du sinus lorsque ces deux axes se réunissent en un seul. M. Biot a vérifié cette loi par de nombreuses expériences ayant pour objet de déterminer l'angle de divergence du faisceau ordinaire et du faisceau extraordinaire : il a comparé ces mesures avec les nombres déduits de la loi du produit des sinus par le principe de la moindre action, et a trouvé toujours un accord satisfaisant entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience. En transformant les formules données antérieurement par M. Brewster, M. Biot a reconnu que la loi du produit des sinus à laquelle il avait été conduit par l'analogie, se trouvait implicitement renfermée dans les formules plus compliquées que M. Brewster avait déduites de ses observations; ainsi les expériences du physicien écossais, comme celles de M. Biot, établissent l'exactitude de la loi du produit des sinus. Pour la traduire dans le langage de la théorie des ondes, il faut se rappeler que les vitesses des rayons incidents et réfractés y sont en rapport inverse de ce qu'elles seraient d'après le système de l'émission : ainsi, la différence des carrés des vitesses des faisceaux ordinaire et extraordinaire considérées sous le point de vue de ce système, répond dans celui des ondes à la différence des quotients de l'unité divisée par les carrés des vitesses des mêmes rayons. Or, je vais démontrer que cette dernière différence doit être effectivement égale à un facteur constant multiplié par le produit des deux sinus, d'après la construction que j'ai donnée pour déterminer la vitesse des rayons lumineux par une section normale faite dans l'ellipsoïde construit sur les trois axes d'élasticité.

Démonstration théorique de la loi de MM. Biot et Brewster, sur la différence des carrés des vitesses.

Soient BB′ et CC′ (fig. 13) le plus grand et le plus petit diamètre de l'ellipsoïde : je prends toujours le premier pour axe des x et le second pour axe des z, le diamètre moyen coïncidant avec l'axe des y projeté en A centre de l'ellipsoïde. Si l'on appelle *axes optiques* du milieu, les directions suivant lesquelles les *rayons lumineux* qui le parcourent ne peuvent avoir qu'une seule vitesse, celles qui jouissent de cette propriété sont, d'après la construction qui détermine la vitesse des rayons lumineux, les deux diamètres de l'ellipsoïde perpendiculaires aux sections circulaires. Cela posé, soit

$$fx^2+gy^2+hz^2=1,$$

l'équation de l'ellipsoïde; si l'on y fait $y=0$, on aura $fx^2+hz^2=1$ pour l'équation de l'ellipse CMBN C′M′B′N′ située dans le plan de la figure, que nous supposons coïncider avec celui des xz. Les deux plans diamétraux MM′ et NN′ qui coupent l'ellipsoïde suivant un cercle, passent par l'axe moyen projeté en A, et doivent être inclinés sur l'axe des x d'un angle i tel que les demi-diamètres AM et AN soient égaux au demi-axe moyen de l'ellipsoïde, ou que les carrés de ceux-là soient égaux au carré de celui-ci, qui est $\frac{1}{g}$. Représentons AM ou AN par r, nous aurons

$$z=r\sin.i, \text{ et } x=r\cos.i;$$

substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse $fx^2+hz^2=1$,

on a

$$f r^2 \cos.^2 i + h r^2 \sin.^2 i = 1,$$

ou, puisque $r^2 = \frac{1}{g}$,

$$f \cos.^2 i + h \sin.^2 i = g;$$

d'où l'on tire :

$$\sin.^2 i = \frac{f-g}{f-h}; \quad \cos.^2 i = \frac{g-h}{f-h}; \quad \text{tang.}^2 i = \frac{f-g}{g-h}.$$

Ainsi l'équation du plan AM est, $z = x\sqrt{\frac{f-g}{g-h}}$, et celle du plan AN de l'autre section circulaire, $z = -x\sqrt{\frac{f-g}{g-h}}$.

Soit $y = px + qz$ l'équation du plan diamétral mené perpendiculairement à un rayon lumineux d'une direction quelconque; il s'agit de calculer la différence entre les deux quotients de l'unité divisée successivement par les carrés des demi-axes de sa section elliptique, en fonction des angles que ce plan fait avec les deux sections circulaires; car ces angles sont égaux à ceux que la normale à ce plan, ou le rayon lumineux, fait avec les normales aux deux sections circulaires, c'est-à-dire avec les deux axes optiques du cristal. Or, si l'on appelle m l'angle compris entre le plan $y = px + qz$ et la section circulaire MM', et n l'angle qu'il fait avec l'autre section circulaire NN', on a :

$$\cos. m = \frac{p\sqrt{f-g} - q\sqrt{g-h}}{\sqrt{f-h} \times \sqrt{1+p^2+q^2}},$$

et

$$\cos. n = \frac{p\sqrt{f-g} + q\sqrt{g-h}}{\sqrt{f-h} \times \sqrt{1+p^2+q^2}};$$

d'où l'on tire

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{(f-g)(\cos.n-\cos.m)^2}{(g-h)(\cos.n+\cos.m)^2},$$

et

$$\frac{1}{p^2} = \frac{-(f-h)(g-h)(\cos.n+\cos.m)^2-(f-g)(f-h)(\cos.n-\cos.m)^2+4(f-g)(g-h)}{(f-h)(g-h)(\cos.n+\cos.m)^2}.$$

Calculons maintenant les deux diamètres de la section elliptique, qui donnent les vitesses des rayons ordinaire et extraordinaire perpendiculaires au plan de cette section : il suffit pour cela de former l'équation polaire de l'ellipsoïde, et de chercher les valeurs *maximum* et *minimum* du rayon vecteur dans ce plan. Soient $x=\alpha y$ et $z=\beta y$ les équations générales du rayon vecteur; le carré de sa longueur sera égal à $x^2+y^2+z^2$, ou à $y^2(1+\alpha^2+\beta^2)$, y répondant au point d'intersection de la droite avec la surface de l'ellipsoïde. Les équations de la droite et de la surface ayant lieu en même temps pour ce point, on a $y^2(f\alpha^2+h\beta^2+g)=1$; d'où l'on tire, $y^2=\frac{1}{f\alpha^2+h\beta^2+g}$; et par conséquent le carré du rayon vecteur est égal à $\frac{1+\alpha^2+\beta^2}{f\alpha^2+h\beta^2+g}$, expression que nous égalerons à $\frac{1}{t}$, afin que la variable t représente l'unité divisée par le carré du rayon vecteur : nous obtenons ainsi l'équation polaire de l'ellipsoïde

$$f\alpha^2+h\beta^2+g=t(1+\alpha^2+\beta^2),$$

dont Petit a fait une application si élégante à la discussion générale des surfaces du second degré.

Pour exprimer que le rayon vecteur particulier que nous considérons est contenu dans le plan $y=px+qz$, il faut écrire $1=p\alpha+q\beta$, équation qui étant différentiée par rap-

port à α et à β, donne,

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{p}{q}.$$

Si l'on différentie de même l'équation polaire de l'ellipsoïde en considérant β et t comme fonction de α, on a

$$2f\alpha + 2h\beta.\frac{d\beta}{d\alpha} = (1+\alpha^2+\beta^2)\frac{dt}{d\alpha} + 2t\alpha + 2t.\frac{d\beta}{d\alpha},$$

ou mettant pour $\frac{d\beta}{d\alpha}$ la valeur ci-dessus $-\frac{p}{q}$,

$$2qf\alpha - 2ph\beta - 2tq\alpha + 2tp\beta = (1+\alpha^2+\beta^2)\frac{dt}{d\alpha};$$

d'où l'on tire

$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{2qf\alpha - 2ph\beta - 2tq\alpha + 2tp\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}.$$

Lorsque le rayon vecteur atteint son *maximum* ou son *minimum*, t est à son *minimum* ou son *maximum*, et par conséquent $\frac{dt}{d\alpha}$ devient égal à zéro, on a donc,

$$2qf\alpha - 2ph\beta - 2tq\alpha + 2tp\beta = 0,$$

ou,

$$\alpha q(t-f) - \beta p(t-h) = 0.$$

Si l'on joint à cette relation l'équation de condition,

$$p\alpha + q\beta = 1,$$

qui exprime que le rayon vecteur est contenu dans le plan de la section elliptique, on en tire les valeurs suivantes de α et β correspondant aux valeurs *maximum* et *minimum* du

rayon vecteur,

$$\alpha = \frac{p(t-h)}{p^2(t-h)+q^2(t-f)}, \qquad \beta = \frac{q(t-f)}{p^2(t-h)+q^2(t-f)}.$$

On peut mettre l'équation polaire de l'ellipsoïde sous a forme

$$\alpha^2(t-f)+\beta^2(t-h)+t-g=0;$$

et substituant à la place de α et β leurs valeurs, on a

$$p^2(t-h)^2(t-f)+q^2(t-f)^2(t-h)+(t-g)[p^2(t-h)+q^2(t-f)]^2=0,$$

ou,

$$(t-f)(t-h)[p^2(t-h)+q^2(t-f)]+(t-g)[p^2(t-h)+q^2(t-f)]^2=0,$$

ou enfin, en supprimant le facteur commun $p^2(t-h)+q^2(t-f)$,

$$(t-f)(t-h)+p^2(t-g)(t-h)+q^2(t-f)(t-g)=0;$$

équation du second degré qui doit donner à la fois les valeurs *maximum* et *minimum* de t, c'est-à-dire, les deux valeurs de t qui correspondent à celles des demi-axes de la section elliptique.

On peut diviser cette équation par p^2 et la mettre sous la forme

$$(t-f)(t-h)\frac{1}{p^2}+(t-g)(t-h)+\frac{q^2}{p^2}(t-f)(t-g)=0;$$

et en substituant pour $\frac{1}{p^2}$ et $\frac{q^2}{p^2}$ les valeurs que nous avons trouvées plus haut en fonction des angles m et n, on arrive

après plusieurs réductions à l'équation,

$$t^2-t[f+h-(f-h)\cos.n\cos.m]+fh+\tfrac{1}{4}(\cos.^2n+\cos.^2m)(f-h)^2-\tfrac{1}{2}\cos.n\cos.m(f^2-h^2)=0;$$

d'où l'on tire

$$t=\tfrac{1}{2}(f+h)-\tfrac{1}{2}(f-h)\cos.n\cos.m\pm\tfrac{1}{2}(f-h)\sqrt{1+\cos.^2n\cos.^2m-\cos.^2n-\cos.^2m},$$

ou

$$t=\tfrac{1}{2}(f+h)-\tfrac{1}{2}(f-h)\cos.n\cos.m\pm\tfrac{1}{2}(f-h)\sin.n.\sin.m; \quad (1)$$

donc la différence entre les deux valeurs de t, ou la quantité cherchée, est égale à

$$(f-h)\sin.n.\sin.m;$$

par conséquent cette différence est proportionnelle au produit des sinus des deux angles m et n; ce qu'il fallait démontrer.

Les angles dont il s'agit sont ceux que la direction commune des rayons ordinaire et extraordinaire fait avec les deux diamètres de l'ellipsoïde perpendiculaires aux sections circulaires, diamètres que nous avons appelés *axes optiques*, en admettant qu'on devait donner ce nom aux deux directions suivant lesquelles les *rayons lumineux* traversent le

---

(1) Les deux valeurs de t, qui donnent les quotients de l'unité divisée successivement par les carrés des vitesses du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire, peuvent être mises sous la forme suivante :

$$t=\tfrac{1}{2}(f+h)-\tfrac{1}{2}(f-h)\cos.(m+n),$$

et

$$t=\tfrac{1}{2}(f+h)-\tfrac{1}{2}(f-h)\cos.(m-n).$$

cristal sans y éprouver de double réfraction. Mais il est à remarquer qu'en général ces rayons rencontrent obliquement l'élément de la surface des ondes lumineuses auquel ils correspondent : or nous avons fait remarquer précédemment que si la surface du cristal était parallèle à cet élément ou à son plan tangent, la direction normale serait celle qu'il faudrait donner au faisceau incident pour qu'il n'éprouvât pas de double réfraction en pénétrant dans le cristal ; d'où il semblerait qu'on devrait aussi donner le nom d'*axes optiques* à ces deux directions des rayons incidents, qui ne coïncident pas avec les deux normales aux sections circulaires de l'ellipsoïde; ainsi, la direction des axes optiques serait différente, selon qu'on la jugerait d'après la direction des *rayons incidents*, perpendiculaires à la fois à la surface des ondes incidentes et des ondes réfractées, ou d'après la direction des *rayons réfractés correspondant à ces ondes.* A la vérité, cette différence est très-légère dans presque tous les cristaux à deux axes; mais il en est quelques-uns où elle devient plus sensible et où l'on ne peut plus confondre les deux directions : celle à laquelle il paraît le plus convenable de donner le nom d'*axe optique du cristal* est la direction des *rayons réfractés* qui le parcourent sans éprouver de double réfraction; en adoptant cette définition, la loi du produit des sinus des angles qu'un rayon quelconque fait avec les deux axes optiques, devient une conséquence rigoureuse de notre théorie, ainsi que nous venons de le démontrer.

Jusqu'ici nous nous sommes occupés uniquement de la vitesse et de la direction des ondes et des rayons; nous allons chercher maintenant leurs plans de polarisation.

Plans de polarisation des ondes ordinaires et extraordinaires.

D'après ce que nous avons dit au commencement de ce Mémoire, en déduisant notre hypothèse sur la nature des vibrations lumineuses des phénomènes que présente l'interférence des rayons polarisés, le plan de polarisation doit être parallèle ou perpendiculaire à la direction des vibrations lumineuses : il ne s'agit plus maintenant que de choisir entre ces deux directions celle qui s'accorde avec l'acception reçue : or on appelle *plan de polarisation* du faisceau ordinaire dans les cristaux à un axe, le plan mené par ce faisceau parallèlement à l'axe du cristal; et il est clair que les vibrations ordinaires, c'est-à-dire celles qui mettent toujours en jeu la même élasticité, sont les vibrations perpendiculaires à l'axe du cristal : en effet, dans le cas des cristaux à un axe, la surface d'élasticité devient une surface de révolution, et chaque section diamétrale a toujours son plus grand ou plus petit rayon vecteur situé sur l'intersection de son plan avec l'équateur; c'est donc ce rayon vecteur qui reste constant, puisque l'équateur est un cercle, et qui donne en conséquence la direction des vibrations ordinaires; d'où l'on voit que ces vibrations sont toujours perpendiculaires à l'axe du cristal; ainsi, le plan mené suivant cet axe et le rayon ordinaire est perpendiculaire à ces vibrations, puisqu'elles sont aussi perpendiculaires au rayon ordinaire, en raison de la sphéricité de l'onde à laquelle elles appartiennent; mais ce plan est précisément, comme nous venons de le dire, ce qu'on est convenu d'appeler *le plan de polarisation du rayon ordinaire;* ainsi nous appellerons *plan de polarisation d'une onde lumineuse*, le plan normal à la direction de ses vibrations.

Cette définition théorique s'accorde avec le sens qu'on attache à l'expression *plan de polarisation* dans le système de l'émission, tant que l'onde est sphérique et que ses vibrations sont perpendiculaires au rayon lumineux, parce qu'alors le plan de polarisation passe toujours par le rayon; mais quand les vibrations sont obliques au rayon, le plan de polarisation, qui doit leur être perpendiculaire d'après notre définition, ne contient plus le rayon lumineux, tandis que dans le système de l'émission on le suppose toujours dirigé suivant ce rayon. Ainsi, l'on n'attribuerait pas exactement la même direction, d'après les deux théories, aux plans de polarisation des rayons lumineux dans les milieux où leurs ondes n'ont plus la forme sphérique. Mais d'abord, cette différence serait toujours assez légère, parce que la surface des ondes lumineuses ne s'écarte pas beaucoup de la forme sphérique même dans les cristaux dont la double réfraction est la plus énergique; en second lieu, il devient inutile d'en tenir compte pour les expériences faites par M. Biot et les autres physiciens sur la direction des plans de polarisation des rayons ordinaires et extraordinaires, puisque c'est toujours en dehors du cristal et d'après la direction des plans de polarisation des rayons incidents ou émergents qu'ils ont jugé de celle des plans de polarisation des rayons réfractés.

Ainsi, par exemple, supposons qu'on veuille déterminer les plans de polarisation de la réfraction ordinaire et extraordinaire dans une plaque cristallisée à faces parallèles et perpendiculaires aux rayons incidents; il suffit pour cela d'employer de la lumière préalablement polarisée, et de tourner la plaque dans son plan, jusqu'à ce que le faisceau émer-

gent, analysé avec un prisme ou un rhomboïde de spath d'Islande, ne présente plus aucune trace de dépolarisation par l'effet de son passage au travers de la plaque cristallisée: lorsque cette condition est remplie, on peut en conclure que le plan de polarisation de l'onde réfractée coïncide avec celui de l'onde incidente : il y a toujours deux positions de la plaque qui satisfont à cette condition, et donnent ainsi le moyen de tracer sur le cristal la direction des plans de polarisation de la réfraction ordinaire et de la réfraction extraordinaire. Dans cette expérience, l'onde incidente étant parallèle aux faces de la plaque cristallisée, conserve ce parallélisme en la parcourant; et si la direction des vibrations de l'onde incidente coïncide avec celle de l'un des axes de la section diamétrale parallèle faite dans la surface d'élasticité, elles n'éprouvent plus de déviation en parcourant le cristal; alors, les ondes incidente, réfractée et émergente, ont toutes trois le même plan de polarisation, et leurs surfaces sont parallèles, quoique d'ailleurs les rayons réfractés puissent être obliques à leur onde, et ne pas se trouver ainsi sur le prolongement des rayons incidents et émergents. Dans ce cas, la définition du plan de polarisation selon le système de l'émission ne donne plus rigoureusement pour le plan de polarisation des rayons réfractés la même direction que la définition tirée de notre théorie, quoiqu'elles s'accordent d'ailleurs sur la direction des plans de polarisation des rayons incidents et émergents, les seuls qu'on puisse déterminer immédiatement par l'observation.

En considérant toujours comme le véritable plan de polarisation celui qui est perpendiculaire aux vibrations lumineuses, je vais démontrer que les plans de polarisation des

ondes ordinaires et extraordinaires divisent en deux parties égales les angles dièdres formés par les deux plans menés suivant la normale à l'onde et les deux normales aux plans des sections circulaires de la surface d'élasticité.

La règle donnée par M. Biot pour déterminer la direction des plans de polarisation des rayons ordinaires et extraordinaires s'accorde avec la théorie exposée dans ce Mémoire.

En effet, supposons que l'on coupe cette surface par un plan diamétral parallèle à l'onde, les deux axes de cette section donneront les directions des vibrations ordinaires et extraordinaires; si donc on mène par le centre deux plans perpendiculaires à ces deux diamètres, ce seront les plans de polarisation respectifs des vibrations ordinaires et extraordinaires. Or, il faut remarquer, 1° qu'ils passeront chacun par un des axes de la section, puisque ceux-ci sont perpendiculaires entre eux; 2° que les axes de la section diamétrale la coupant chacun en deux moitiés symétriques, doivent diviser en parties égales les angles aigus et obtus formés par les deux lignes suivant lesquelles le plan de cette section rencontre ceux des sections circulaires, puisque dans ces deux directions, les rayons vecteurs de la section diamétrale sont égaux entre eux comme appartenant en même temps aux deux sections circulaires qui ont le même diamètre.

Cela posé, concevons une sphère concentrique à la surface d'élasticité; le plan de la section diamétrale et les deux plans des sections circulaires traceront sur cette sphère un triangle sphérique, dont le côté compris dans le premier plan sera divisé en deux parties égales par un des plans de polarisation:

son triangle supplémentaire sera celui que formeront les normales de ces trois plans menées par le centre commun, c'est-à-dire celui qui résultera de l'intersection de la surface sphérique avec les trois plans menés suivant ces trois normales prises deux à deux : or, les plans qui divisent en deux parties égales les côtés du premier triangle, divisent en deux parties égales aussi les angles du second ; c'est une propriété des triangles supplémentaires facile à démontrer ; donc, le plan de polarisation, qui divise en deux parties égales le côté du premier triangle compris dans la section diamétrale, divise aussi en deux parties égales l'angle correspondant du second triangle, c'est-à-dire l'angle dièdre formé par les deux plans menés suivant la normale à l'onde et les diamètres perpendiculaires aux deux sections circulaires ; et par la même raison, l'autre plan de polarisation doit diviser en deux parties égales le supplément de cet angle dièdre.

M. Biot a déduit de ses observations sur la double réfraction de la topaze et de plusieurs autres cristaux à deux axes la règle suivante, pour déterminer la direction des plans de polarisation des rayons ordinaires et extraordinaires.

Concevez un plan mené par chacun des axes du cristal et par le rayon qui subit la réfraction ordinaire. Concevez par ce même rayon un troisième plan qui divise en deux parties égales l'angle dièdre que les deux premiers forment. Les molécules lumineuses qui ont subi la réfraction ordinaire sont polarisées suivant ce plan intermédiaire ; et les molécules qui ont subi la réfraction extraordinaire sont polarisées perpendiculairement au plan intermédiaire mené par le rayon extraordinaire suivant les mêmes conditions.

(Précis élémentaire de physique expérimentale, tom. II, pag. 502.)

Les lignes que M. Biot appelle ici *les axes du cristal*, sont celles que nous avons nommées *axes optiques*. Nous avons remarqué que pour accorder le mieux possible le langage du système des ondulations avec celui de l'émission, il fallait appeler *axe optique* la direction suivant laquelle les *rayons lumineux* parcourent le cristal sans y subir la double réfraction; et en adoptant cette définition, nous avons démontré que la loi du produit des deux sinus était une conséquence rigoureuse de notre théorie. Il n'en est plus de même de la règle de M. Biot relative à la détermination des plans de polarisation. Son énoncé ne s'accorde pas rigoureusement avec la construction que nous venons de déduire des propriétés de la surface d'élasticité; parce que les angles dièdres divisés en deux parties égales par les plans de polarisation, d'après cette construction, sont menés suivant la normale à l'onde et les deux normales aux sections circulaires de la surface d'élasticité, et qu'en général la normale à l'onde ne coïncide pas tout-à-fait avec la direction du rayon réfracté, ni les normales aux sections circulaires de la même surface avec les véritables axes optiques, qui sont les perpendiculaires aux sections circulaires de l'ellipsoïde. A la vérité, le théorème de géométrie que nous venons de démontrer pour la surface d'élasticité s'applique également à l'ellipsoïde; mais le plus grand et le plus petit rayon vecteur de la section diamétrale faite dans l'ellipsoïde perpendiculairement à la direction du rayon lumineux, ne donnent plus la direction de ses vibrations; en sorte que les plans qui leur sont perpendiculaires ne sont plus les véritables plans de polarisation des ondes réfractées. La règle de M. Biot ne s'accorde

donc pas rigoureusement avec notre théorie. Mais il faut faire attention, 1° que dans les cristaux qu'il a employés, les normales aux sections circulaires de la surface d'élasticité diffèrent si peu de la direction des véritables axes optiques, qu'on pourrait les confondre sans qu'il en résultât d'erreur sensible pour la direction des plans de polarisation; 2° que, dans les mêmes cristaux, les rayons dirigés suivant les axes optiques sont presque normaux aux ondes correspondantes; 3° enfin, que cet habile physicien n'a pu déterminer directement que le plan de polarisation des faisceaux incidents ou émergents, et non celui des rayons réfractés. Les petites différences qui nous sont indiquées ici par la théorie seraient sans doute très-difficiles à constater, même dans ceux des cristaux à deux axes dont la double réfraction est la plus énergique; car on ne saurait déterminer avec une grande précision, par les moyens connus, la direction du plan de polarisation d'un rayon lumineux; et il y a encore ici une difficulté de plus, celle de fixer la direction du plan de polarisation dans l'intérieur du cristal d'après des observations faites sur les rayons émergents. Ainsi, loin de voir une objection contre notre théorie dans la règle donnée par M. Biot, on doit plutôt la considérer comme en étant une confirmation, puisque la petite discordance qui existe entre elles devait échapper nécessairement à ses observations.

La plupart des cristaux présentent peu de différence entre les plans des sections circulaires de la surface d'élasticité et de l'ellipsoïde construit sur les mêmes axes.

Les deux sections circulaires de la surface d'élasticité sont également inclinées sur le plan des xy, qui passe par l'axe

moyen, et la tangente de cette inclinaison est, comme nous l'avons vu, $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$: la tangente de l'angle que les deux sections circulaires de l'ellipsoïde font avec le même plan est égale à $\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$. On voit par ces formules, que lorsque la double réfraction n'a pas une très-grande énergie, c'est-à-dire, lorsque c diffère peu de a, $\frac{c}{a}$ étant presque égal à l'unité, les plans des sections circulaires des deux surfaces se confondent sensiblement : pour la topaze, le rapport $\frac{c}{a}$ est 0,9939 ; ce même rapport est égal à 0,9725, d'après les observations de M. Biot, dans la chaux sulfatée anhydre, l'un des cristaux à deux axes dont la double réfraction est la plus énergique (1).

Observations sur la marche des ondes et des rayons lumineux dans la direction des axes optiques.

C'est aux sections circulaires de la surface d'élasticité

---

(1) D'après les observations de M. Biot, l'angle des deux axes optiques est dans la topaze limpide de 63°.14′.2″, et dans la chaux sulfatée anhydre de 44°.41′.22″ ; ce qui donne 31°.37′.1″, et 22°.20′.41″ pour la valeur de l'angle dont la tangente est représentée par $\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$; il résulte des mêmes mesures que l'angle qui a pour tangente $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$, est dans le premier cristal de 31°.46′.25″, et dans le second de 22°.54′.43″ ; ainsi la différence de direction entre les sections circulaires de l'ellipsoïde et de la surface d'élasticité est seulement pour la topaze de 9′.24″, et pour la chaux sulfatée anhydre de 34′.2″.

Nota. Les secondes marquées dans la valeur des angles donnés par M. Biot et que nous avons transcrites ici, ne signifient pas qu'on puisse porter jusque-là la précision des mesures ; car il est déja difficile de déterminer l'angle des deux axes optiques à moins d'un demi-degré près.

qu'une onde plane doit être parallèle dans l'intérieur du cristal, pour n'y être susceptible que d'une seule vitesse de propagation; et cette condition est satisfaite lorsqu'on présente perpendiculairement au faisceau lumineux la plaque de cristal taillée parallèlement aux sections circulaires de la surface d'élasticité; mais il est à remarquer que les rayons ordinaires et extraordinaires qui en résultent ne suivent pas la même direction, et s'écartent un peu les uns et les autres de la normale à la section circulaire de l'ellipsoïde. Ceci devient plus facile à comprendre sur la fig. 14, qui représente l'intersection du plan des $x\ z$ avec les deux nappes de la surface de l'onde, et dans laquelle on a exagéré l'ellipticité de l'une d'elles, pour rendre la divergence des rayons plus sensible. Cette intersection se compose d'un cercle et d'une ellipse dont les équations sont,

$$x^2 + z^2 = b^2, \quad \text{et,} \quad a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2.$$

Le plan TS mené parallèlement à la section circulaire de la surface d'élasticité, et distant du centre A d'une quantité égale à b, touche à la fois le cercle et l'ellipse en E et en O, points de contact de ce plan avec la surface de l'onde; ainsi les rayons vecteurs AO et AE sont les directions des rayons ordinaire et extraordinaire qui répondent à l'onde plane TS parallèle à la section circulaire de la surface d'élasticité, et ils traversent la plaque $ts\ t's'$ dans le même intervalle de temps, quoique en suivant des chemins différents. Le rayon vecteur AL, mené au point d'intersection de l'ellipse et du cercle, et pour lequel les deux valeurs tirées de l'équation de l'onde deviennent égales, est la direction suivant laquelle les *rayons lumineux* ne peuvent affecter qu'une seule vitesse,

et par conséquent celle de la normale à la section circulaire de l'ellipsoïde, que nous avons nommée *axe optique*. On trouve pour les tangentes des angles que ces trois rayons vecteurs font avec l'axe des x :

$$\text{tang.OAT}=\frac{a^2}{c^2}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}};\quad \text{tang.LAT}=\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}};$$
$$\text{tang.EAT}=\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}.$$

On voit que ces expressions ne diffèrent entre elles que par les facteurs $\frac{a}{c}$, $\frac{a^2}{c^2}$, qui s'approchent beaucoup de 1 dans la plupart des cristaux.

Tous les rayons ordinaires ou extraordinaires, parallèles à LA, parcourent le cristal dans le même intervalle de temps et avec la même vitesse (1), puisqu'ils suivent d'ailleurs le même chemin; mais ils divergent nécessairement en dehors du cristal, parce que les deux plans tangents menés par le point L aux deux nappes de la surface de l'onde, font entre eux un angle sensible : au contraire, les rayons AE et AO, qui emploient aussi le même temps à traverser la plaque *ts t's'*, tout en suivant l'un et l'autre des directions différentes, redeviennent parallèles entre eux en dehors du cristal.

Quand on fait varier l'inclinaison de la face de sortie du

(1) Quelles que soient les directions des faces d'entrée et de sortie, puisque ces rayons suivent la même route LA; tandis que les rayons EA et OA n'emploient exactement le même temps à parcourir la plaque cristallisée que lorsque ses faces ts et $t's'$ sont parallèles à l'une des sections circulaires de la surface d'élasticité.

milieu réfringent, le rayon EA et celui des deux rayons LA, qui appartient à la même nappe EL, se réfractent conformément à la loi de Descartes, tandis que le rayon OA et l'autre rayon dirigé suivant LA qui répond à la seconde nappe LO, sont réfractés extraordinairement. Ceci établit encore une nouvelle différence entre les caractères des axes optiques des cristaux à un axe et à deux axes ; car, dans les premiers, tous les rayons parallèles à l'axe optique dans l'intérieur du cristal sont réfractés suivant la loi de Descartes, quelle que soit la direction et l'inclinaison de la face de sortie, parce que ces rayons se trouvant alors parallèles à un des axes d'élasticité, sont perpendiculaires à la fois aux deux nappes de la surface de l'onde.

Après nous être appesantis sur des distinctions que la théorie montre clairement, mais qui échappent à la plupart des observations, et n'ont pu être mises en évidence par celles de M. Biot, nous allons considérer un moment les plans de polarisation d'une manière moins rigoureuse, et adopter la règle qu'il donne pour déterminer leur direction, sans rien changer à son énoncé, afin de pouvoir nous expliquer d'une manière plus simple et plus claire.

Les rayons nommés ordinaires *par MM. Biot et Brewster, sont ceux dont les variations de vitesse ont le moins d'étendue.*

Ainsi que nous l'avons déja remarqué, il n'y a plus de rayon ordinaire proprement dit dans les cristaux à deux axes, puisqu'aucun des deux faisceaux ne parcourt le cristal avec la même vitesse dans toutes les directions ; mais celui qu'on

appelle faisceau ordinaire, par analogie avec la dénomination adoptée pour les cristaux à un axe, est celui dont les variations de vitesse sont les moins sensibles : or il est aisé de voir que c'est celui dont le plan de polarisation divise en deux parties égales l'angle dièdre aigu compris entre les plans menés par la direction des rayons lumineux et les deux axes optiques; tandis que le plan de polarisation du faisceau qui éprouve les plus grandes variations de vitesse, divise en deux parties égales l'angle dièdre obtus, supplément du premier. En effet, quelle que soit la direction du premier faisceau, son plan de polarisation passant en dedans de l'angle aigu QAP (fig. 15) des deux axes optiques, sa trace sur le plan de la figure est comprise dans l'intérieur de cet angle, et par conséquent la projection du diamètre de l'ellipsoïde perpendiculaire au plan de polarisation, qui est normale à la trace de ce plan, se trouve comprise nécessairement dans l'angle aigu MAN ou M′A′N′ des deux sections circulaires, puisqu'elles sont normales aux axes optiques PP′ et QQ′; donc ce diamètre ne peut rencontrer la surface de l'ellipsoïde en dehors des deux parties dont les projections ont pour limites MB′N′A et MBNA; mais si du point A comme centre, et d'un rayon égal à celui des sections circulaires, on décrit une sphère, sa surface passera par-dessous celle de l'ellipsoïde dans ces deux parties. Ainsi aucun des diamètres de l'ellipsoïde projeté dans l'espace angulaire MAN, M′A′N′, ne sera plus petit que le diamètre MM′ des sections circulaires, qui est égal à l'axe moyen de l'ellipsoïde ; la longueur des rayons vecteurs répondant à cette partie de la surface a donc pour limites d'une part le demi-grand-axe, et de l'autre le demi-axe moyen. On démontrerait de même

que la longueur des rayons vecteurs qui donnent la mesure des vitesses du second faisceau lumineux, est comprise entre le demi-axe moyen et le demi-petit-axe. Or, dans le cas représenté par la figure 15, où le petit axe d'élasticité partage l'angle aigu des deux axes optiques et le grand axe l'angle obtus, il y a plus de différence entre le petit axe et l'axe moyen qu'entre celui-ci et le grand axe, comme on le voit par l'expression $\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$ de la tangente de l'angle que les plans des sections circulaires font avec le grand axe; car cet angle étant moindre que 45° par hypothèse, on a $c^2(a^2-b^2) < a^2(b^2-c^2)$, ou à peu près, $a-b < b-c$, en supprimant les facteurs $c(a+b)$ et $a(b+c)$, comme sensiblement égaux.

Les raisonnements que nous venons de faire pour l'ellipsoïde pourraient s'appliquer aussi bien à la surface d'élasticité, qui donne, par les axes de ses sections diamétrales, les véritables directions des vibrations lumineuses, et en conséquence celles de leurs plans de polarisation, perpendiculaires à ces vibrations. Seulement, les vitesses que l'on considérerait alors ne seraient plus celles des rayons lumineux, mais celles des ondes mesurées sur la normale à leur surface; et les deux plans formant les angles dièdres aigu et obtus que les plans de polarisation divisent chacun en deux parties égales, au lieu de passer par le rayon lumineux et les axes optiques proprement dits, seraient menés suivant la normale à l'onde et les normales aux deux sections circulaires de la surface d'élasticité. La tangente de l'inclinaison de ces sections sur le demi-grand-axe a est égale à $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$,

expression plus petite que 1 quand $a^2-b^2 < b^2-c^2$, et plus grande quand $a^2-b^2 > b^2-c^2$, ou, ce qui revient à peu près au même, lorsque $a-b > b-c$: dans ce second cas, l'angle des deux sections circulaires ou de leurs normales qui contient le petit axe c est donc obtus, tandis qu'il est aigu dans le premier cas.

Ainsi les ondes, dont les plans de polarisation sont compris dans l'angle aigu des deux plans menés suivant la normale à l'onde et les normales aux plans des sections circulaires, sont celles dont les vitesses de propagation varient entre les limites les plus rapprochées, tandis que les vitesses des ondes dont les plans de polarisation passent dans l'angle dièdre obtus éprouvent des variations plus étendues. Il est donc naturel d'appeler les rayons correspondant aux premiers *rayons ordinaires*, et ceux des autres ondes *rayons extraordinaires*, comme l'ont fait M. Biot et M. Brewster.

Cas particulier où l'on n'aurait pas plus de raisons de donner le nom de rayon ordinaire à l'un des deux faisceaux qu'à l'autre.

On conçoit un cas où les deux faisceaux éprouvant des variations de vitesse également étendues, on n'aurait plus aucune raison pour donner le nom de faisceau ordinaire plutôt à l'un qu'à l'autre; cela aurait lieu si les deux axes optiques étaient perpendiculaires entre eux, parce qu'alors on aurait $\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}=1$, ou, $c^2(a^2-b^2)=a^2(b^2-c^2)$; ce qui suppose que $a-b$ est à très-peu près égal à $b-c$, puisqu'on peut supprimer les facteurs $c^2(a+b)$ et $a^2(b-c)$ sans

altérer sensiblement l'équation, tant que a ne diffère pas beaucoup de c, c'est-à-dire, tant que la double réfraction n'a pas une très-grande énergie.

Quand on a l'angle des deux axes optiques, il suffit de connaître deux des trois constantes a, b, c, *pour déterminer la troisième.*

Il suffit de connaître a et c, c'est-à-dire la plus grande et la plus petite vitesse de la lumière dans le cristal, avec l'angle des deux axes optiques, pour déterminer l'autre demi-axe b, puisque la tangente de la moitié de cet angle est égale à $\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$, fonction connue des trois quantités a, b, et c. C'est en suivant cette marche que j'avais calculé, d'après les éléments de la double réfraction de la topaze donnés par M. Biot, les variations de vitesse que le faisceau ordinaire devait y subir, avant d'avoir cherché à les constater par l'expérience, et je les ai trouvées telles à peu près que le calcul me les avait données. La théorie m'indiquait aussi dans quel sens le faisceau ordinaire avait les vitesses les plus différentes. Pour la topaze, c'est le plus petit axe de la surface d'élasticité ou de l'ellipsoïde qui divise en parties égales l'angle aigu des deux axes optiques, et les deux limites des vitesses du rayon ordinaire sont a et b : or le faisceau ordinaire a la vitesse a quand il est parallèle à l'axe des y, puisque a est le plus grand rayon vecteur de la section diamétrale perpendiculaire faite dans l'ellipsoïde, et que le plan de polarisation correspondant, c'est-à-dire, perpendiculaire au rayon vecteur a, est bien celui du faisceau

ordinaire, comme passant dans l'angle aigu des deux axes optiques. La vitesse de ce même faisceau devient égale à b quand la lumière traverse le cristal parallèlement à l'axe des x, parce qu'alors le plan diamétral perpendiculaire à cette direction coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse dont le plus grand rayon vecteur est b; d'ailleurs le plan perpendiculaire à b ou le plan de polarisation correspondant appartient à la réfraction ordinaire; car il est encore contenu dans l'angle aigu formé par les deux plans menés suivant le rayon lumineux et chacun des axes optiques, angle dièdre qui devient alors égal à zéro, ces deux plans se confondant avec celui des deux axes optiques. Ainsi la théorie annonçait qu'il fallait que le faisceau ordinaire traversât le cristal, tantôt suivant la direction qui divise en parties égales l'angle obtus des deux axes, et tantôt perpendiculairement à leur plan, pour éprouver les variations de vitesse les plus sensibles; aussi est-ce d'après cette indication que j'ai fait la première expérience par laquelle j'ai constaté l'existence de ces variations.

Je me suis particulièrement attaché aussi, dans mes expériences, à m'assurer que la vitesse de propagation des ondes lumineuses dépend uniquement de la direction de leurs vibrations ou du plan de polarisation dans le cristal, et que tant que ce plan ne change pas, la vitesse des rayons reste constante, quelle que soit d'ailleurs leur direction. La diffraction me donnait des moyens très-délicats pour apercevoir les plus légères différences de vitesse. A la vérité, la topaze est le seul cristal sur lequel j'aie opéré jusqu'à présent; mais j'ai assez varié et multiplié mes observations pour m'assurer du moins que ce théorème était rigoureusement exact dans la topaze, et l'on doit supposer par analogie qu'il

l'est également pour tous les autres cristaux à deux axes. D'ailleurs, sans en donner une démonstration complète, les considérations mécaniques que j'ai exposées à ce sujet établissent en sa faveur de fortes probabilités théoriques.

Réflexions sur les probabilités que présente la théorie exposée dans ce Mémoire.

Le théorème que j'ai donné, si admissible par sa simplicité même, la définition mécanique des vibrations lumineuses déduite des lois de l'interférence des rayons polarisés, et la supposition que les lignes homologues de cristallisation sont parallèles dans toute l'étendue des milieux réfringents que nous avons considérés, sont les trois hypothèses, je pourrais dire les trois principes sur lesquels repose la théorie de la double réfraction exposée dans ce Mémoire. Si nous n'avions eu à calculer qu'un phénomène, tel que celui des interférences, qui dépend seulement de la nature des vibrations lumineuses, leur définition aurait dû suffire à l'explication des faits. Mais la double réfraction résultant de la constitution particulière du milieu réfringent, il fallait nécessairement définir cette constitution, en ne mettant toutefois dans sa définition que ce qui était nécessaire à l'explication du phénomène.

La théorie que nous avons adoptée, et les constructions si simples que nous en avons déduites, présentent ce caractère remarquable que toutes les inconnues sont déterminées en même temps par la solution du problème. On trouve à la fois la vitesse du rayon ordinaire, celle du rayon extraordinaire, et leurs plans de polarisation. Les physiciens qui ont

étudié avec attention les lois de la nature, sentiront que cette simplicité et ces relations intimes entre les diverses parties du phénomène offrent les plus grandes probabilités en faveur de la théorie qui les établit.

Long-temps avant de l'avoir conçue, et par la seule méditation des faits, j'avais senti qu'on ne pouvait découvrir la véritable explication de la double réfraction sans expliquer en même temps le phénomène de la polarisation, qui l'accompagne constamment : aussi est-ce après avoir trouvé quel mode de vibration constituait la polarisation de la lumière, que j'ai entrevu d'abord les causes mécaniques de la double réfraction. Il me semblait encore plus évident que les vitesses des faisceaux ordinaire et extraordinaire devaient être, en quelque sorte, les deux racines d'une même équation : je n'ai jamais pu admettre un seul instant l'hypothèse d'après laquelle ce seraient deux milieux différents, le corps réfringent et l'éther qu'il renferme, qui transmettraient l'un les ondes extraordinaires, l'autre les ondes ordinaires ; et en effet, si ces deux milieux pouvaient transmettre séparément les ondes lumineuses, on ne voit pas pourquoi les deux vitesses de propagation seraient rigoureusement égales dans la plupart des corps réfringents, et pourquoi des prismes de verre, d'eau, d'alcool, etc., ne diviseraient pas aussi la lumière en deux faisceaux distincts.

Nous avons supposé que c'était le même milieu vibrant qui, dans les corps doués de la double réfraction, propageait les ondes ordinaires et extraordinaires, mais sans spécifier si les molécules du corps participaient aux vibrations lumineuses, ou si celles-ci étaient uniquement propagées par l'éther contenu dans ce corps ; notre théorie peut se conci-

lier également avec les deux hypothèses. Il est plus aisé de comprendre dans le premier cas, à la vérité, comment l'élasticité d'un même milieu réfringent varie avec la direction suivant laquelle s'exécutent les déplacements moléculaires ; mais l'on conçoit aussi, dans le second, que les molécules du corps doivent influer sur la dépendance mutuelle des tranches de l'éther entre lesquelles elles sont situées, et qu'elles peuvent être disposées de telle manière qu'elles affaiblissent plus cette dépendance mutuelle, ou l'élasticité de l'éther, dans une direction que dans une autre.

Le phénomène de la dispersion démontre que les rayons de diverses couleurs ou les ondes de différentes longueurs ne parcourent pas les corps avec la même vitesse, ce qui provient sans doute de ce que l'élasticité mise en jeu par les ondes lumineuses varie avec leur longueur. Lorsque la sphère d'activité des actions moléculaires est supposée infiniment petite relativement à l'étendue d'une ondulation, l'analyse démontre que l'élasticité qui propage les ondes ne varie pas avec leur largeur ; mais il n'en est plus de même quand la dépendance mutuelle des molécules s'étend à une distance sensible relativement à la longueur d'une ondulation. Il est facile de démontrer que, dans ce cas, l'élasticité mise en jeu est un peu moindre pour les ondes étroites que pour les ondes plus larges, et qu'en conséquence les premières doivent se propager un peu plus lentement que les secondes, conformément à l'expérience (1). Il en résulte que

(1) La démonstration de cette conséquence de la théorie fait l'objet de la note II, à la suite du Mémoire.

les trois demi-axes a, b, c, qui représentent les racines carrées des élasticités mises en jeu par les vibrations parallèles, ou les vitesses de propagation correspondantes, doivent varier un peu pour les ondes de largeurs différentes, d'après la théorie comme d'après l'expérience : or, il est possible que cette variation n'ait pas lieu suivant le même rapport entre les trois axes; alors l'angle que les deux sections circulaires de l'ellipsoïde font entre elles, et partant l'angle des deux axes optiques, ne seraient plus les mêmes pour les rayons de diverses couleurs, ainsi que M. Brewster et M. Herschel l'ont remarqué sur la plupart des cristaux à deux axes.

Le phénomène de la dispersion a peut-être encore d'autres causes que celle que nous venons d'indiquer; mais quelles qu'elles puissent être, on doit toujours conclure des observations de ces deux habiles physiciens, que les longueurs des demi-axes a, b, c, ne varient pas suivant le même rapport pour les ondes de diverses largeurs, dans les cristaux où les axes optiques changent de direction avec la nature des rayons lumineux; c'est du moins la seule explication qu'on puisse en donner, d'après la théorie exposée dans ce Mémoire.

Fig. 1ère

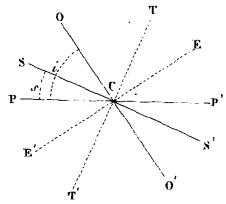

Fig. 2.

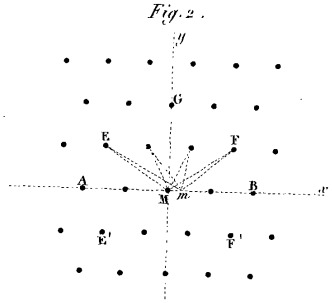

Fig. 3.

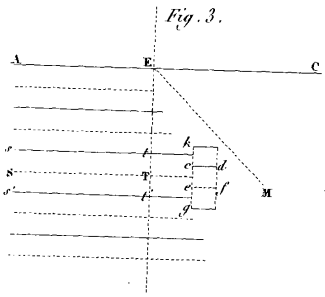

Fig. 4.

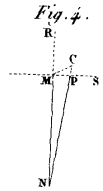

Fig. 5.

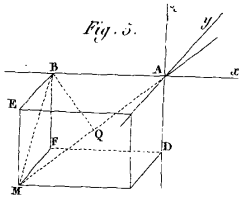

Fig. 6.

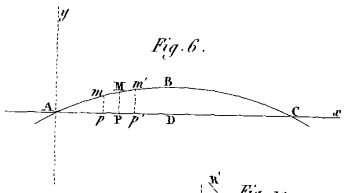

Fig. 7.

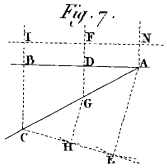

Fig. 8.

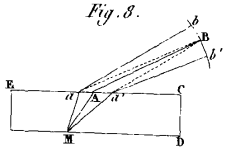

Fig. 9.

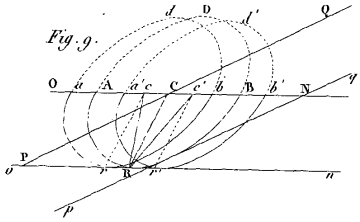

Fig. 10.

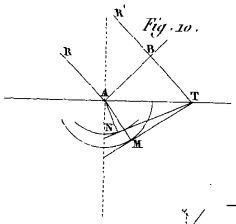

Fig. 11.

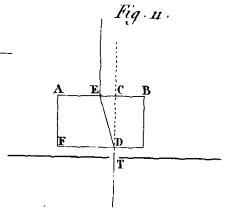

Fig. 12.

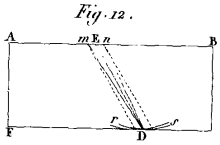

Fig. 13.

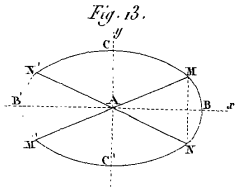

Fig. 14.

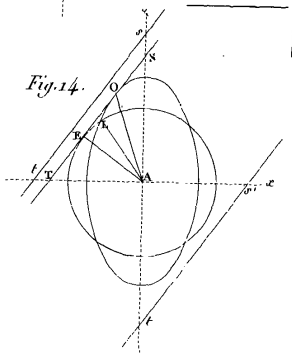
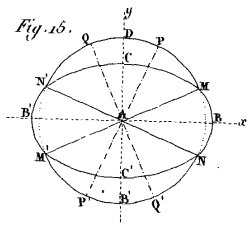
Fig. 15.